

**THE BOOK WAS
DRENCHED**

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191093

UNIVERSAL
LIBRARY

سلسلة كتب مكملاز المدرسية المصرية

الهندسة الابتدائية

جزء الأول

مقرر السنة الأولى من التعليم الثانوي

تأليف

مُحَمَّد خَالِد الْحُسَيْنِي

مدرس الرياضة بمدرسة المعلمين الخديوية

« حقوق الطبع محفوظة »

١٩١٢ - ١٣٣٠

مطبعة المعارف بشارع النجاة بمصر



بسمِ الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سائر الانبياء والمرسلين
(وسد) فلما قررت نظارة المعارف العمومية اعادة تدريس علم
الهندسة المستوية وسائر العلوم الرياضية باللغة العربية طرق الرياضيون
أبواب التأليف وسارعوا الى التصنيف وكثرت الكتب الرياضية باللغة
العربية كما كثر غيرها من الكتب الادبية

غير أن أكثر هذه المؤلفات لا يتفق وروح البرنامج الذى سنّته
المعارف المصرية لمدارسها الثانوية لهذا أحبت أن أضع كتاباً يكون
شاملاً لما تقررت دراسته على الطلاب فقامت بتأليف هذا المختصر
وجعلته على أحدث الطرق

ولما كان علم الهندسة المستوية يدرس فى الثلاث السنين الاولى
من التعليم الثانوى قسمت كتابى هذا الى ثلاثة اجزاء وجعلت كل

جزء منها خاصاً بما تقررت دراسته في كل سنة منها وقد اخترت ما وضعته
نظارة المعارف العمومية من الاصطلاحات العربية واكثرت من التمارين
وأضفت اليها بعضاً من المسائل المحلولة كي يستعين بها الطالب في حل
غيرها وتكون نموذجاً له عند كتابة حلول المسائل التي تلقى عليه واسأل
الله أن يجعله نافعاً أنه على ما يشاء قدير

محمد خالد حسنين

محتويات الكتاب

الباب	الصفحة
الاول - في التمهيدات والتعاريف الاولى	٩ . . .
الجسم والسطح والخط والنقطة	٩
الخط المستقيم والسطح المستوي	١٠
الزوايا	١٢
الدعوى والبرهان	١٣
البديهيات	١٤
القضايا المسلمة صحتها	١٦
الثاني - في الخطوط والزوايا	١٧
الثالث - في المثلثات	٢٥
تساوى المثلثات	٢٧
اختلاف اضلاع المثلث	٤١
اختلاف زوايا المثلث	٤٢
العمود والمائل	٤٨
تساوى المثلثات القائمة الزوايا	٥٥
الرابع - في المتوازيات	٦٦
تساوى الزوايا المتبادلة	٦٧

- ٦٨ تساوى الزوايا المتناظرة
- ٧٥ الزاوية التى بوازي ضلعاها ضلعى زاوية اخرى
- ٧٨ الزاوية التى ضلعاها عموديان على ضلعى زاوية اخرى
- ٨٢ مجموع زوايا المثلث
- ٨٤ مجموع زوايا المضلع
- ٨٨ الخامس - فى الاشكال المتوازية الاضلاع
- ٨٩ خواص متوازى الاضلاع
- ٩١ متى يكون الشكل الرباعى متوازى اضلاع
- ١٠١ السادس - فى الدعاوى العملية
- ١١٥ السابع - فى المحال الهندسة
- ١١٩ تقاطع المحال الهندسية

الرموز المستعملة في الكتاب

الرمز	المدلول
$<$	أكبر من
$>$	أصغر من
\sphericalangle	زاوية
\triangle	مثلث

المهندسة المستوية

الباب الأول

في التمهيدات والتعاريف الأولية

١ - الجسم والسطح والخط والنقطة

الجسم - كل جسم يشغل محلاً معيناً فقالب الطوب مثلاً يشغل محلاً في الفراغ قدر حجمه وعند وضعه يقال ان له طولاً وعرضاً وسمكاً (ارتفاعاً)

(تعريف) الجسم هو ما يشغل محلاً معيناً وله عادة ابعاد ثلاثة الطول والعرض والارتفاع

السطح - لو اخذنا قطعة من الصابون وفرضنا انه باستعمالها أخذ ارتفاعها في نقصان تدريجاً الى ان صارت كورقة رقيقة فبالاستمرار في استعمال هذه القطعة يأتي وقت يعدم فيه الارتفاع والباقي بعد ذلك يقال له سطح وفي الحقيقة فان الحد الفاصل بين قطعة الصابون والهواء الذي يحيط بها يسمى بالسطح وليس له سمك أصلاً فله بعدان فقط الطول والعرض

(تعريف) السطح هو ما له طول وعرض مجرد عن الارتفاع

الخط - لو أخذنا قطعة ورق حمراء ثم لوّنا جزءاً منها باللون الاسود سمي الحد الفاصل بين اللونين بالخط فهو ليس بالاحمر ولا بالاسود وليس له عرض فله بعد واحد فقط وهو الطول (تعريف) الخط هو ما له طول مجرد عن العرض والارتفاع النقطة - ثم اذا لوّنا جزءاً آخر من الورقة الحمراء باللون الازرق بشرط أن يتقاطع مع اللون الاسود فان الخط الفاصل بين اللون الاحمر واللون الاسود يقطع الخط الفاصل بين اللون الاحمر واللون الازرق فيما يسمى بالنقطة وهي مجردة عن كل بعد (تعريف) النقطة الهندسية هي كل ما له وضع مجرد عن الطول والعرض والارتفاع

٢ - الخط المستقيم والسطح المستوي

الخط المستقيم - الخط اما أن يكون مستقيماً أو منحنيّاً فالمستقيم ما حدث من تحرك نقطة في اتجاه واحد لا يتغير والمنحنى ما حدث من تحرك نقطة في اتجاه يتغير على الدوام وتتميز الخطوط المستقيمة من غيرها بأنه لو اشترك مستقيمان في نقطتين انطبق أحدهما على الآخر ولا يكون بينهما أى مسافة فلو أخذنا أحد المستقيمين المرسومين (في شكل ١) وطبقناه على المستقيم الثانى كما في (شكل ٢) بحيث تقع نقطة ١ على نقطة ح



(شكل ٢)

(شكل ١)

ونقطة ب على نقطة و انطبق المستويان تمام الانطباق ولا يكون بينهما ادنى مسافة

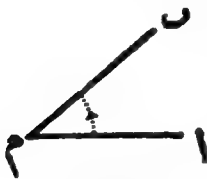
(ملاحظة) تطلق كلمة خط وخطوط على الخط المستقيم والخطوط المستقيمة للاختصار

السطح المستوي — السطح المستوي هو سطح لو أخذ فيه نقطتان ووصلا بخط مستقيم كان هذا المستقيم موجوداً بتمامه في هذا السطح وبعبارة أخرى هو سطح ينطبق عليه المستقيم تمام الانطباق مهما تغير وضعه

(ملاحظة) تطلق كلمة مستو على السطح المستوي للاختصار

٣ — الزوايا

إذا تلاقى مستويان في نقطة حدث من تلاقيهما ما يسمى زاوية



(شكل ٣)

ويسمى كل من المستقيمين بضلعى

الزاوية ونقطة تلاقيهما برأس الزاوية

فمثلاً إذا فرضنا ان الضلعين ب م ٢ ١ ٦

تلاقيا في نقطة م (شكل ٣) فان

مقدار ميل الضلع ب م على ٢ ١

يسمى زاوية ويقدر هذا الميل بقدر الدوران الذي يدوره ب م

حول نقطة م اذا اجداً يتحرك وهو منطبق على ١ م الى أن يأخذ

وضعه الثانى م ب

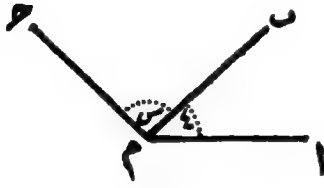
قراءة الزاوية — قرا الزاوية بثلاثة أحرف بحيث يكون حرف

الرأس في الوسط فيقال زاوية م ١ ب أو زاوية ب م ١ (شكل ٣)

وبحوز قراءة الزاوية بحرف الرأس فقط اذا كانت مفردة فيقال
زاوية م (شكل ٣)

وقد يحسن وضع حرف أ ورقم داخل الزاوية ليدل عليها فيقال
زاوية ٤ وزاوية س (شكل ٤)

الزاويتان المتجاورتان — اذا اتحدت زاويتان في الرأس وكان
بينهما ضلع مشترك يقال لهما



(شكل ٤)

متجاورتان فتلا الزاويتان

١ ٢ ٦ ٦ ٢ ٢ ح

(شكل ٤) يقال لهما

متجاورتان لانهما اتحدتا

في الرأس ٢ ولان الضلع

٢ مشترك بينهما

الزاويتان المتقابلتان بالرأس — اذا اتحدت زاويتان في
الرأس وكان ضلعا احدهما على امتداد ضلعي الاخرى يقال للزاويتين
متقابلتان بالرأس فتلا اذا قاطع المستقيمان ١ ٢ ح و في نقطة م



(شكل ٥)

(شكل ٥) يقال لكل من

الزاويتين ١ ٢ ح ٦ ٦ ٢ ٢ ح أو

لكل من الزاويتين ٢ ٢ ح ٦ ٦

١ ٢ ح متقابلتان بالرأس

الزاوية القائمة والعمود — اذا تلاقي مستقيمان وكانت الزاويتان
المتجاورتان الحادتان متساويتين يقال لكل زاوية منهما قائمة ويقال

للمستقيمين متعامدان وان كلا منها عمودى على الآخر فتلا اذا



تلاقى ا ب ج د ح م في نقطة م (شكل ٦)
وكانت $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ يقال
لكل من هاتين الزاويتين قائمة ويكون
ح م عمودياً على ا ب

(ملاحظة) تنقسم الزاوية القائمة الى

(شكل ٦)

٩٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى درجة وتنقسم الدرجة الى ٦٠
جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى دقيقة والدقيقة الى ٦٠ جزءاً
متساوية كل جزء منها يسمى ثانية



ويرمز للدرجة بالرمز ($^{\circ}$) وللدقيقة
بالرمز ($'$) وللثانية بالرمز ($''$)

الزاوية الحادة — يقال للزاوية
حادة اذا كان مقدارها اقل من قائمة مثل
زاوية ا ب م (شكل ٧)

(شكل ٧)



(شكل ٨)

الزاوية المنفرجة —
يقال للزاوية منفرجة
اذا كان مقدارها اكبر من
قائمة واصغر من قائمتين مثل
زاوية ا ب م (شكل ٨)

٤ — الدعوى والبرهان

يختص علم الهندسة المستوية بدراسة الاشكال المرسومة على

السطح المستوى ويشتمل ذلك على جملة دعاوى بعضها نظرى وبعضها الآخر عملى ولا تثبت صحة هذه الدعاوى الا باقامة الدليل (البرهان)
الدعوى النظرية — هى دعوى حقيقية تتضح صحتها بواسطة
برهان عقلى

الدعوى العملية — هى دعوى تتطلب انشاء عمل هندسى مع
اقامة البرهان العقلى على صحته

ويشتمل منطق الدعوى على مفروض ومطلوب
مفروض الدعوى — هو الحقيقة التى تفرض فى الدعوى
ويعترف بصحتها

مطلوب الدعوى — هو الحقيقة التى يراد اقامة البرهان على صحتها
(ملاحظة) وقد تستلزم اقامة البرهان العقلى رسم خطوط أولية
تسمى بالعمل

النتيجة — هى حقيقة تستخرج من دعوى قام الدليل على صحتها
البرهان — هو الدليل الذى بواسطته تتضح صحة الدعوى

٥ — البديهيات

البديهيات هى مبادئ بسيطة يدركها العقل لاول وهلة لسهولة
ووضوحها ولا تحتاج الى برهان للتسليم بصحتها وهالك مثالها
بديهية ١ — الشئان المساوى كل منهما لشيء واحد يكونان
متساويين

بديهية ٢ — اذا أضفنا أشياء متساوية الى اخرى متساوية
كانت الحواصل متساوية

بديهية ٣ — اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى متساوية كانت البواقي متساوية.

بديهية ٤ — اذا أضفنا أشياء متساوية الى أخرى غير متساوية كانت الحواصل غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ٥ — اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى غير متساوية كانت البواقي غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ٦ — المضاعفات الواحدة للشئ نفسه أو للأشياء المتساوية تكون متساوية

بديهية ٧ — الشئان اللذان يساويان نصف الشئ الواحد أو انصاف أشياء متساوية يكونان متساويين

بديهية ٧ — اذا ضربنا أشياء غير متساوية في مقدار واحد كانت الحواصل مختلفة وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ٩ — اذا قسمنا أشياء غير متساوية على مقدار واحد كانت الخواارج غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بديهية ١٠ — الكل أكبر من الجزء والجزء أصغر من الكل

وهناك بديهيات غير التي ذكرت نخص منها بعض بديهيات تسمى بالبديهيات الهندسية وهالك مثالها

(١) الاجسام التي ينطبق بعضها على بعض تكون متساوية

(٢) المستقيمان اللذان يحددان في نقطتين يكونان في اتجاه واحد

(٣) المستقيم المحدود له نقطة تصيف واحدة فقط

٦ — القضايا المسلمة صحتها

ان الاشكال الهندسية التي يلزم رسمها في الهندسة المستوية تستلزم استعمال المسطرة والفرجار (البرجل) ولأجل الوصول الى رسم هذه الاشكال يجب تسليم صحة بعض قضايا عملية وهاك مثالها

(١) يمكن رسم مستقيم من أى نقطة مفروضة الى أى نقطة أخرى معلومة .

(٢) يمكن مد مستقيم على استقامته الى أن يبلغ أى طول

(٣) يمكن رسم دائرة من أى نقطة نعتبرها مركزاً وبأى نصف قطر

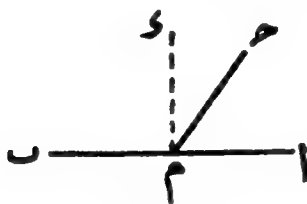
الباب الثاني

في الخطوط والزوايا



« نظرية ١ »

إذا تلاقى مستقيم وآخر فان مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادتين
في جهة واحدة منه يساوي قائمتين



(شكل ٩)

(المفروض) ان المستقيم ح م يتلاقى مع المستقيم ا ب في نقطة
م ويصنع الزاويتين المتجاورتين ا م ح و ب م ح في جهة واحدة
من ا ب

(المطلوب اثباته) أن $\angle ا م ح + \angle ب م ح = ٩٠^\circ$ زاويتين قائمتين
(البرهان) قيم من قطعة م السود م و على ا ب فتكون $\angle ا م و =$ قائمة
وكذلك فتكون $\angle ب م و =$ قائمة

من الشكل $\angle ب م ح + \angle ا م و = \angle ب م و$

فتكون $\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ =$

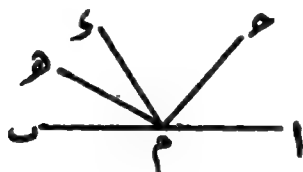
$$\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ + \angle ٢٠ =$$

ولكن $\angle ١٢٠ = \angle ٢٠ + \angle ٢٠$

فتكون $\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ = \angle ٢٠ + \angle ٢٠$

$=$ زاويتين قائمتين وهو المطلوب

نتيجة ١ - مجموع الزوايا المجتمعة حول نقطة مفروضة على مستقيم وفي جهة واحدة منه يساوي قائمتين



(شكل ١٠)

(البرهان) $\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ + \angle ٢٠ =$

$$\angle ١٢٠ =$$

فتكون $\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ + \angle ٢٠ = \angle ٢٠ + \angle ٢٠$

$$\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ =$$

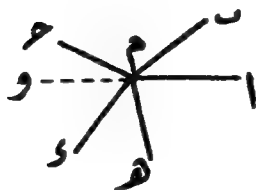
ولكن $\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ = \angle ٢٠ + \angle ٢٠$ (ظريفة ١)

فتكون $\angle ١٢٠ + \angle ٢٠ + \angle ٢٠ = \angle ٢٠ + \angle ٢٠$

$=$ وهو المطلوب

نتيجة ٢ - مجموع الزوايا المتجاورة المجتمعة حول نقطة واحدة في جميع جهاتها يساوي أربع قوائم

(البرهان) نبدأ على استقامته الى و



(شكل ١١)

فتكون $\angle ا ب م + \angle ب م ح + \angle ح م و = ١٨٠^\circ$ (نظرية ١)

وتكون $\angle ا م و + \angle و م د + \angle د م ح = ١٨٠^\circ$ (نظرية ١)

وبالجمع تكون $\angle ا ب م + \angle ب م ح + \angle ح م و + \angle و م د + \angle د م ح = ٣٦٠^\circ$

ولكن من الشكل $\angle ا ب م + \angle ب م ح + \angle ح م و = ١٨٠^\circ$

فتكون $\angle و م د + \angle د م ح + \angle ح م و = ١٨٠^\circ$ وهو المطلوب

(تعريف) يقال أن الزاويتين متكاملتان متى كان مجموعهما يساوي قائمتين وتسمى احدهما مكملة للآخرى مثل زاويتي $\angle ا ب م$ و $\angle ح م و$ (شكل ٩)

(تعريف) ويقال أن الزاويتين متتامتان متى كان مجموعهما يساوي قائمة واحدة وتسمى احدهما متممة للآخرى مثل زاويتي $\angle ا ب م$ و $\angle ح م و$ (شكل ٩)

نتيجة ٣ - الزوايا المكملة لزاوية واحدة كلها متساوية

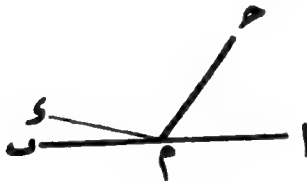
نتيجة ٤ - الزوايا المتممة لزاوية واحدة كلها متساوية

(تنبيه) يقال ان النظريتين متماكستان متى كان مفروض الاولى
مطلوباً اثباته في الثانية والمطلوب اثباته في الاولى هو مفروض الثانية

« نظرية ٢ »

(وهي عكس نظرية ١)

اذا كانت الزاويتان المجاورتان متكاملتين كان ضلعاها المطرفان
على استقامة واحدة



(شكل ١٢)

(المفروض) ان مجموع الزاويتين المجاورتين $\angle ١ + \angle ٢ = ١٨٠^\circ$
يساوى قائمتين

(المطلوب اثباته) ان ضلعيهما $\overline{م-ا}$ و $\overline{م-ب}$ على استقامة واحدة

(البرهان) ان لم يكن $\overline{م-ا}$ و $\overline{م-ب}$ على استقامة $\angle ١ + \angle ٢ > ١٨٠^\circ$ على استقامته
الى

وتكون $\angle ١ + \angle ٢ > ١٨٠^\circ$ (نظرية ١)

ولكن $\angle م ح د + \angle م ح و = ١٨٠^\circ$ (بالقرض)
 فتكون $\angle م ح د + \angle م ح و = ١٨٠^\circ + \angle م ح د + \angle م ح و$
 وتكون $\angle م ح د = \angle م ح و$

وذلك لا يتأتى الا اذا انطبق المستقيمان م و م ح

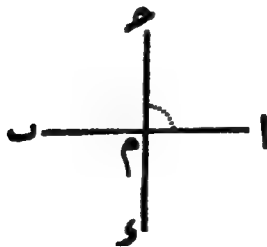
ومن حيث ان م و على استقامة م ح (بالعمل)

فيكون م ح على استقامة م ايضاً (وهو المطلوب)

(تنبيه) لا يقتصر في علم الهندسة على اعطاء النظريات
 والدعاوى العملية لمجرد الحفظ وإنما هناك تمارين تطبيقية تستلزم
 استخدام هذه الدعاوى وتلك البديهيات والقضايا المسماة صحتها
 لاثبات حقيقتها الهندسية

تمارين (١)

(١) اذا كانت احدى الزاويا الاربع الحادثة من تقاطع مستقيمين
 قائمة تكون كل من الثلاثة الاخرى قائمة كذلك



(شكل ١٤)

(المفروض) ان ح د يقطع ا ب في نقطة م وانه يصنع الزاوية
الاربع ٢١ ح ٦ ح ٢ م ب ٦ م د ٦ م د ١٢ مع العلم بأن
٢١ ح قائمة

(المطلوب اثباته) ان كلا من الزاوية ح ٢ م ب ٦ م د و
١٢ م قائمة

(البرهان) (اولاً) ٢١ ح + ح ٢ م ب ٦ م د = ٢٢ (نظرية ١)

ولكن ٢١ ح = ٢٢ (بالمفروض)

اذن ح ٢ م ب ٦ م د = ٢٢

(ثانياً) ح ٢ م ب ٦ م د + ح ٢ م د ٦ م د = ٢٢ (نظرية ١)

ولكن ح ٢ م ب ٦ م د = ٢٢ (بالاثبات)

اذن ح ٢ م د ٦ م د = ٢٢

(ثالثاً) ح ٢ م د ٦ م د + ح ٢ م ب ٦ م د = ٢٢ (نظرية ١)

ولكن ح ٢ م د ٦ م د = ٢٢ (بالاثبات)

اذن ح ٢ م ب ٦ م د = ٢٢ وهو المطلوب

(٢) في المثلث ا ب ح الزاوية ا ب ح = الزاوية ا ح ب

فيبرهن على ان زاويتين الخارجيتين الحادتين من امتداد الضلع ب ح
في كل من جهتيه متساويتان

(٣) في المثلث ا ب ح الزاوية ا ب ح = الزاوية ا ح ب

فاذا مد الضلع ا ب جهة ب الى س والضلع ا ح جهة ح الى ص
فيبرهن على ان ح ب س = ح ب ص

(٤) برهن على ان منصفى زاويتين متجاورتين حادتين من تلاقي

مستقيمين متعامدان

(٥) من نقطة م المفروضة على المستقيم ا ب رسم م ح عمودياً على ا ب وفي احدى جهتيه ثم رسم م و عمودياً على ا ب ايضاً وفي الجهة الأخرى منه فبرهن على ان م ح على استقامة م و

(٦) من نقطة م المفروضة على ح و رسم المستقيم ا ب بحيث يصنع الزاوية ح م ا ومن نقطة م ايضاً رسم المستقيم م ب بحيث يصنع الزاوية م ب مساوية للزاوية ح م ا فبرهن على ان م ا على استقامة م ب

(٧) اذا كانت الزاوية الحادثة من منصفى زاويتين متجاورتين قائمة فبرهن على ان ضلعي الزاويتين المتطرفين على استقامة واحدة

(٨) ا ب ح م و مستقيمان متقاطعان ممأ بالتمامد فبرهن على ان منصف زاوية م ا و على استقامة منصف زاوية ح م ب

« نظرية ٣ »

الزاويتان المتقابلتان في الرأس متساويتان



(شكل ١٤)

(المفروض) ان ا ب ح و قاطعا في م وان الزاويتين م ا ح م ب متقابلتان في الرأس وان الزاويتين م ا و م ب متقابلتان في الرأس كذلك

(المطلوب اثباته) ان $\angle م ا ح = \angle م و ح$

وان $\angle م ا و = \angle م ح و$

(البرهان) بما ان المستقيم $ا م$ يلاقى المستقيم $ح و$ في نقطة $م$

فتكون $\angle م ا ح + \angle م ا و = \angle م و ح + \angle م و ا$ (نظرية ١)

وكذلك $م$ يلاقى $ا ب$ في نقطة $م$

فتكون $\angle م و ح + \angle م و ا = \angle م ا ح + \angle م ا و$ (نظرية ١)

وعليه تكون $\angle م ا ح + \angle م ا و = \angle م و ح + \angle م و ا$

وتكون $\angle م ا ح = \angle م و ح$

وبالطريقة نفسها يبرهن على ان $\angle م ا و = \angle م ح و$

وهو المطلوب

تمارين (٢)

(١) اذا تقاطع المستقيمان $ا ب$ و $ح و$ في نقطة $م$ وكان $م$ س

منصفاً لـ $ا ب$ و فبرهن على ان امتداد $م$ ينصف $\angle م ا ح$

(٢) برهن على ان منصفى زاويتين متقابلتين في الرأس على

استقامة واحدة

(٣) برهن على ان منصفات اربع الزوايا الحادة من تقاطع

مستقيمين متعامدة

الباب الثالث

في المثلثات

(١) الشكل المستوي هو جزء من السطح المستوي محاط بخط أو أكثر ويسمى مجموع الخطوط التي تحيط بالشكل بمحيطه ويسمى مقدار السطح المحصور في هذا المحيط بمساحته

(٢) كثير المستقيمت هو شكل مستو محاط بخطوط مستقيمة ومتى كان عدد المستقيمت التي تحيط بالشكل أكثر من ثلاثة سمي مضلعاً وتسمى الاضلاع التي تحيط بالشكل بأضلاع المضلع والزوايا الناتجة من تقاطع الاضلاع بزوايا المضلع

(٣) يقال للمضلع انه متساوي الاضلاع اذا تساوت اضلاعه ومتساوي الزوايا اذا تساوت زواياه ومنظم اذا كان متساوي الزوايا والاضلاع

(٤) يقال للمضلع انه محدودب اذا لم يزد مقدار احدى زواياه على قائمتين

(ملاحظة) تطلق كلمة مضلع على المضلع المحدودب للاختصار لان المضلع غير المحدودب ليس من مباحثنا الآن

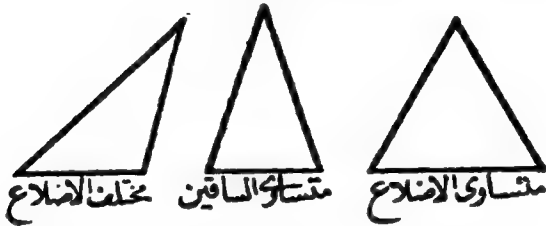
(٥) الشكل الرباعي هو مضلع يحيط به اربعة اضلاع

(٦) المثلث هو شكل مستو محدود بثلاثة مستقيمت

(٧) وتسمى المستقيمت باضلاع المثلث والزوايا الناتجة من تقاطع الاضلاع زوايا المثلث ورموس هذه الزوايا برموس المثلث

(٢)

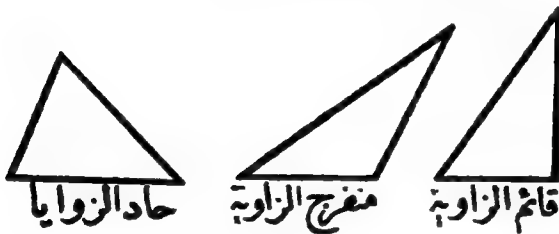
(٨) والمثلث يسمى متساوي الاضلاع اذا تساوت اضلاعه ومتساوي الساقين اذا تساوى فيه ضلعان ومختلف الاضلاع اذا كانت اضلاعه مختلفة الطول كما في شكل (١٥)



(شكل ١٥)

(٩) ويمكن اعتبار اى رأس من رؤوس زوايا المثلث رأساً له ويعتبر عادة الضلع المقابل لهذا الرأس قاعدة له
(١٠) وفي المثلث المتساوي الساقين تعتبر عادة نقطة تقاطع ساقيه رأساً له وضلعه الثالث قاعدة له

(١١) والمثلث يسمى قائم الزاوية اذا كانت احدى زواياه قائمة ومنفرج الزاوية اذا كانت احدى زواياه منفرجة وحاد الزوايا اذا كانت زواياه الثلاث حادة كما في (شكل ١٦)

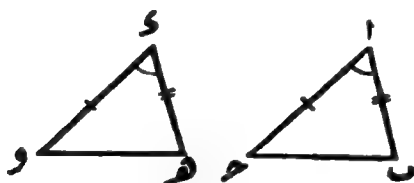


(شكل ١٦)

(١٢) المستقيم الذي يصل رأس المثلث بمتصف قاعدته يسمى
بالمستقيم المتوسط أو بمتصف المثلث

« نظرية ٤ »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما ضلعان
والزاوية المحصورة بينهما كل مع نظيره



(شكل ١٢)

(المفروض) أن المثلثين ABC و DEF فيهما الضلع $AC = DF$ الضلع $AB = DE$ والزاوية المحصورة $\angle A = \angle D$
المحصورة $\angle C = \angle F$

(المطلوب اثباته) ان المثلث $ABC = DEF$ المثلث DEF و من
عامة الوجوه

(البرهان) نطبق $\triangle ABC$ على $\triangle DEF$ و على شرط ان
النقطة A تقع على النقطة D وبأخذ الضلع AB الاتجاه DE
ومن حيث أن $AC = DF$ فنضع نقطة C على نقطة F

ومن حيث أن $\angle \alpha = \angle \beta$ انطبق على $\angle \gamma$ و
 فيقع الضلع α على γ و
 ومن حيث أن $\angle \alpha = \angle \gamma$ و تقع نقطة α على نقطة γ و
 ومن حيث أن نقطة β وقعت على γ ونقطة γ وقعت على β
 فالضلع β ح ينطبق على γ و
 فينتطبق اذن المثلث $\alpha \beta \gamma$ على المثلث $\gamma \gamma \gamma$ وبذلك يتساويان
 من عامة الوجوه وهو المطلوب

تمارين (٣)

(١) المطلوب البرهنة على ان المستقيم الذى ينصف زاوية الرأس
 فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها



(شكل ١٨)

(المفروض) ان المثلث $\alpha \beta \gamma$ متساوى الساقين ($\alpha = \beta$)
 وأن المستقيم $\alpha \gamma$ ينصف زاوية α ح
 (المطلوب اثباته) ان $\beta \gamma = \gamma \gamma$ وان $\alpha \gamma$ عمودى على $\beta \gamma$
 (البرهان) فى المثلثين $\alpha \beta \gamma$ و $\alpha \gamma \gamma$

بما ان $\left. \begin{array}{l} \text{بالفرض} \\ \text{مشارك بين المثلثين} \\ \text{بالفرض} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle A = \angle B \\ \angle C = \angle D \end{array}$

ينطبق $\triangle ABC$ على $\triangle DEF$ (نظرية ٤)
ويكون $BC = DE$

$$\angle A = \angle B$$

وبما ان $\angle A = \angle B$ فكون كل
منهما قائمة ويكون AC عمودياً على BC وبذلك يثبت المطلوب
(٢) في المسألة السابقة اذا أخذنا على AC نقطة مثل D ووصلنا
بينها وبين B BD فبرهن على ان $BD = BC$

(٣) اذا فرضت نقطة مثل E على منتصف الزاوية B ABC فبرهن
على ان $\angle A = \angle B$ اذا كان الضلع $AB = AC$
(٤) ABC مثلث متساوي الساقين نصفنا ساقه AB AD
بالنقطتين E F ثم وصلنا AE BF والمطلوب البرهنة على
ان $AE = BF$

(٥) زاوية رأسها A أخذ على أحد ضليعيها النقطتان B C
وأخذ على الضلع الثاني النقطتان D E بشرط ان $AB = AC$
وان $AD = AE$ والمطلوب البرهنة على ان $BC = DE$

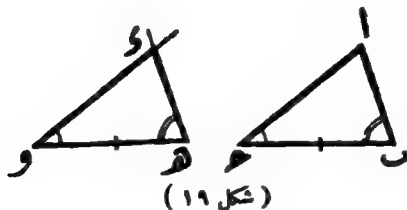
(٦) ABC مربع ونقطه D منتصف الضلع AB فاذا وصل
بينها وبين تقاطع AC E فبرهن على ان $BE = EC$

(٧) ABC مربع ونقطه D منتصف الضلع AB فاذا أخذنا
على الضلعين AC BC البعدين المتساويين AD BE ووصلنا

بين نقطة δ وبين نقطتي γ و ϵ فيرهن على ان $\delta = \epsilon$ و $\gamma = \epsilon$
 (٨) ا ب ح و شكل رباعي فيه ا ب = ح و ا ح = ب و $\gamma = \delta$
 ونقطة δ منتصف الضلع ب ح والمطلوب البرهنة على ان $\delta = \epsilon$ و $\gamma = \epsilon$
 (٩) ا ب ح و δ و ϵ و مثلثان متساويان من قامة الوجوه فاذا
 فرض ان نقطة γ منتصف ب ح ونقطة δ منتصف δ و فيرهن
 على ان ا ب = ح و ا ح = ب و $\gamma = \delta$ و $\epsilon = \delta$
 (١٠) اذا فرض ان نقطة δ هي منتصف الضلع ب ح في
 \triangle ا ب ح ومد ا ب الى δ بحيث كان $\delta = \epsilon$ و فيرهن على ان
 ا ب = ح و $\delta = \epsilon$

« نظرية ه »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما ضلع ومجاوراه
من الزوايا كل مع نظيره



(الفروض) ان الثلثين ا ب ح و ه وفيها الضلع ح

$$= \text{هـ و ب} \Delta \text{ ا ب ح} = \text{د و ه} \Delta \text{ ا ب ح} = \text{د و ه} \Delta \text{ ا ب ح}$$

(٢) اذا كان منتصف زاوية رأس مثلث عمودياً على القاعدة فان المثلث يكون متساوي الساقين

(٣) $ا ب ح$ و $د و ه$ و مثلثان متساويان من عامة الوجوه فإذا
فرض ان $ا س$ ينصف $ا ب$ ويقابل $ب ح$ في نقطة $س$ وان $د و$ $ص$
ينصف $د و$ ويقابل $ه و$ في نقطة $ص$ فبرهن على ان $ا س = د و$

« نظرية ٦ »

الزاويتان المقابلتان لساقي مثلث متساوي الساقين متساويتان



(شكل ٢٠)

(المفروض) ان $ا ب = ا ج$ مثلث متساوي الساقين فيه $ا ب = ا ج$
(المطلوب اثباته) ان $ا ب د = ا ج د$
(البرهان) نرسم المستقيم $ا د$ ينصف $ب ج$
ففي المثلث $ا ب د$ والمثلث $ا ج د$

بالمفروض $ا ب = ا ج$ مشترك بين المثلثين
من حيث ان $ا د$ مشترك بين المثلثين
بالمعمل $ب د = ج د$

ينطبق $\triangle ا ب د$ و $\triangle ا ج د$ على $\triangle ا ب د$ (نظرية ٤)

وبذلك $ا ب د = ا ج د$ وهو المطلوب

(نتيجة) المثلث المتساوي الاضلاع يكون متساوي الزوايا

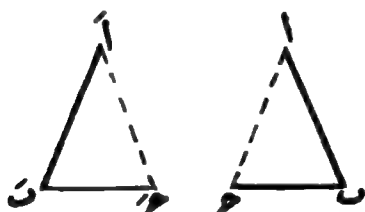
تمارين (٥)

- (١) $AB \parallel CD$ مثلث متساوي الساقين فاذا مد كل من ساقيه
 AB الى E CD الى F ص فبرهن على ان $\angle E = \angle F$ $AE = CF$
- (٢) $AB \parallel CD$ مثلث متساوي الساقين فاذا اخذ على قاعدته BC
 البعد D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
 البعد D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
 البعد D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
- (٣) برهن على ان المستقيمين اللذين يصلان منتصف قاعدة
 مثلث متساوي الساقين بمتصفي ضلعيه متساويان
- (٤) $AB \parallel CD$ مثلث متساوي الساقين فاذا نصف الساق AB في
 نقطة S والساق CD في نقطة T ص فبرهن على ان $ST \parallel BC$ $ST = \frac{1}{2} BC$
- (٥) منصف زاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين متساويان
- (٦) $AB \parallel CD$ مثلث متساوي الساقين $(AB = AC)$ فاذا تقاطع
 منصف زاويتي A C في نقطة M فبرهن على ان M ينصف زاوية B

« نظرية ٧ »

(وهي عكس نظرية ٦)

اذا تساوت زاويتان في مثلث فان الضلعين المقابلين لهما يكونان
 متساويين



(شكل ٢١)

(المفروض) ان $\angle A = \angle A'$ و $\angle B = \angle B'$

(المطلوب اثباته) ان الضلع $AC = A'C'$

(البرهان) نرسم المثلث $A'B'C'$ مقلوب الوضع بأن يأخذ الضلع $A'B'$ الوضع $A'B$ والضلع $A'C'$ الوضع $A'C$

من حيث ان $\angle A = \angle A'$ بالفرض

٦ $\angle B = \angle B'$ بالعمل

فتكون $\angle C = \angle C'$

وبالمثل نبرهن على أن $\angle C = \angle C'$

ومن حيث أن الضلع $AB = A'B'$ في الطول

فينطبق المثلث $A'B'C'$ على المثلث $A'B'C$ وهو في وضعه

المقلوب (نظرية ٥)

وبذلك يتساوى المثلثان من عامة الوجوه

ويكون $AC = A'C'$

ولكن $AC = A'C'$ بالعمل

اذن $AC = A'C'$ وهو المطلوب

(نتيجة) المثلث المتساوي الزوايا يكون متساوي الاضلاع

تمارين (٦)

(١) اذا مد كل من الضلعين AB و AC من $\triangle ABC$ الى D و E وكانت $AD = BE$ و $DE \parallel BC$ فبرهن على ان المثلث ABC متساوي الساقين

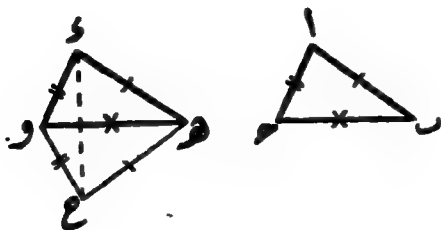
(٢) ABC مثلث متساوي الساقين ($AB = AC$) فاذا تقاطع منصفا الزاويتين المتساويتين في نقطة M فبرهن على ان $\triangle BMC$ متساوي الساقين ايضاً

(٣) في المسألة السابقة فبرهن على أن AM ينصف $\angle A$

(٤) $ABCD$ شكل رباعي فيه $AB = DC$ و $AD = BC$ و $AC = BD$ برهن على أن $AC = BD$

« نظرية (٨) »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوت فيهما الثلاثة الاضلاع
كل مع نظيره



(شكل ٢٢)

(المفروض) ان $ا ب ح$ و $ا ب د$ مثلثان فهما $ا ب = د$ و $ا ب ح = ا ب د$ و $ا ب د = ا ب ح$ و $ا ب ح = ا ب د$

(المطلوب اثباته) أن هذين المثلثين متساويان من عامة الوجوه

(البرهان) تصور وضع المثلث $ا ب ح$ أسفل المثلث $ا ب د$ و على شرط أن ينطبق الضلع $ب ح$ على مساويه $د$ و يأخذ الضلع $ا ب$ الوضع $ح$ والضلع $ا د$ الوضع $ح$ و تم وصل $د ح$

فن حيث ان $د ح = د ح$

فتكون $ا ب ح = ا ب د$ و $ا ب د = ا ب ح$ (نظرية ٥)

ومن حيث ان $د ح = د ح$

فتكون $ا ب ح = ا ب د$ و $ا ب د = ا ب ح$

وعلى ذلك فالزاوية الكلية $د ح$ = الزاوية الكلية $د ح$ و

أى ان $ا ب ح = ا ب د$

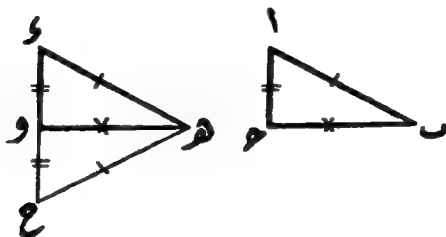
وفى $ا ب ح$ و $ا ب د$

من حيث أن $ا ب ح = ا ب د$ و $ا ب د = ا ب ح$ بالافتراض بالافتراض بالاثبات

فينطبق اذن المثلث $ا ب ح$ على المثلث $ا ب د$ وبذلك يتساويان من عامة الوجوه (نظرية ٤)

(ملاحظة) هذا البرهان خاص ويستخدم فى حالة ما يقع $ح$ داخل الشكل بأن كان المثلثان حادى الزوايا فاذا كان المثلثان منفرجى الزاوية أو قائمى الزاوية نستخدم برهاناً آخر خاصاً لكل حالة منهما

(الحالة الاولى) عندما يكون المثلثان قائمي الزاوية كما في شكل (٢٣)



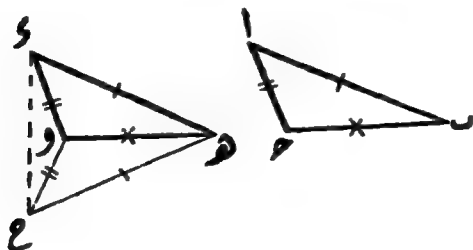
(شكل ٢٣)

(البرهان) بعد وضع المثلث $\triangle ABC$ أسفل المثلث $\triangle DEF$ ونرى في هذه الحالة أن D و E يمر بنقطة و

$$\begin{aligned} \text{وفي } \triangle DEF \text{ الضلع } DE &= EF \\ \angle DEF &= \angle EFD \\ \angle EDF &= \angle FED \end{aligned}$$

وبذلك يتساوى المثلثان $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ من عامة الوجوه
(الحالة الثانية) عندما يكون المثلثان منفرجي الزاوية كما في

شكل (٢٤)



(شكل ٢٤)

(البرهان) بعض وضع المثلث ABC أسفل المثلث DEF ونرى في هذه الحالة أن EF خارج المثلثين ولا يقطع مع DE في $\triangle DEF$ الزاوية $DEF =$ الزاوية DEF كما سبق وكذلك في $\triangle DEF$ $DEF = DEF$ إذن $DEF - DEF = DEF - DEF$ أي أن $DEF = DEF$ أو $DEF = DEF$ وبذلك يتساوى المثلثان ABC و DEF من عامة الوجوه

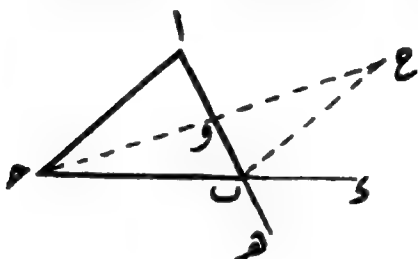
تمارين (٧)

- (١) ABC و DEF شكل رباعي فيه $AB = DE$ و $AC = DF$ $BC = EF$ والمطلوب البرهنة على أن ABC ينصف زاويتي A و D
- (٢) ABC و DEF زاوية أخذ على ضلعها بعدان متساويان $AB = DE$ و $AC = DF$ ثم رسم على B و E المثلث BCD و EFG فيه $BC = EF$ و $CD = FG$ والمطلوب البرهنة على أن AD ينصف B و E
- (٣) ABC و DEF مثلثان متساويين متساويين الساقين مرسومين في جهة قاعدة مشتركة بينهما وهي BC برهن على أن AD ينصف B و يكون عمودياً عليه
- (٤) ABC و DEF مثلثان متساويين متساويين الساقين مرسومين في جهة واحدة لقاعدة مشتركة بينهما وهي BC برهن على أن امتداد AD ينصف B و يكون عمودياً عليه
- (٥) ABC و DEF شكل رباعي فيه $AB = DE$ و $BC = EF$ وقطره

ا ح = ب و برهن على ان $\angle ا > \angle ب$ و $\angle ب > \angle ح$ و

« نظرية ٩ »

اذا مد احد اضلاع مثلث على استقامته فان الزاوية الخارجة الحادثة تكون اكبر من أى زاوية من زواياه الداخلة ما عدا المجاورة لها



(شكل ٢٥)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث ومددنا ضلعه ح ب على استقامته الى و

(المطلوب اثباته) ان الزاوية الخارجة ا ب و أكبر من كل من $\angle ا > \angle ب$ و $\angle ب > \angle ح$ و

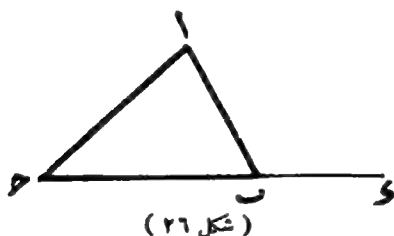
(البرهان) لذلك نقرض أن و منتصف ا ب ونصل ح و ونعده على استقامته ونأخذ على امتداده البعد و ح = ح و ثم نصل ح ب ففى المثلثين

بالعمل	ا و = و ب	} من حيث ان
بالعمل	ح و = و ح	
	$\angle ا > \angle ب$ و $\angle ب > \angle ح$ و	

ينطبق $\triangle ا و ح$ على $\triangle ب و ح$ (نظرية ٤)
 فتكون $\angle ا و ح = \angle ب و ح$
 لكن $\angle ب و ح$ اكبر من $\angle ب و ح$
 فتكون $\angle ا ب و$ اكبر من $\angle ا ب ح$
 وبالطريقة عينها يمكننا أن نبرهن على ان $\angle ا ب و$ اكبر من
 $\angle ا ب ح$ وبذلك يثبت المطلوب

« نظرية ١٠ »

مجموع أى زاويتين فى المثلث أصغر من قائمتين



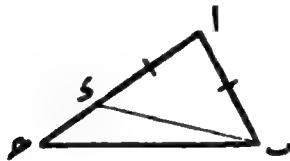
(المفروض) ان المثلث $ا ب ح$ مثلث أيا كان
 (المطلوب اثباته) ان $\angle ا ب ح + \angle ا ح ب$ أقل من قائمتين
 (البرهان) نمد $ح ب$ الى $و$
 فتكون $\angle ا ب ح$ أصغر من $\angle ا ب و$ (نظرية ٩)
 وبأضافة $\angle ا ب ح$ الى طرفى المتباينة يكون
 $\angle ا ب ح + \angle ا ب ح$ أصغر من $\angle ا ب و + \angle ا ب ح$
 أى ان $\angle ا ب ح + \angle ا ح ب$ أصغر من زاويتين قائمتين

نتيجة ١ - يجب ان يكون في كل مثلث زاويتان حادتان على الاقل

نتيجة ٢ - لا يمكن ان يرسم من نقطة خارج مستقيم الا مستقيم واحد عمودي عليه

« نظرية ١١ »

اذا اختلف ضلعان في المثلث فالضلع الاكبر تقابله الزاوية الكبرى



(شكل ٢٧)

(المفروض) في المثلث ABC الضلع AB اكبر من الضلع AC

(المطلوب اثباته) ان $\angle C > \angle B$ اكبر من $\angle B > \angle C$

(البرهان) نأخذ على AB البعد $AD = AC$ ونصل D و

فن حيث ان $AD = AC$

تكون $\angle ADC = \angle ACD$ (نظرية ٩)

ولكن $\angle ADC > \angle B$ خارجة بالنسبة الى المثلث ADB و

اذن $\angle ACD > \angle B$ اكبر من $\angle B$ التي هي $\angle C$ و

اي ان $\angle ACD > \angle B$ اكبر من $\angle B$ و

ومن باب اولي $\angle ACD > \angle B$ اكبر من $\angle B$ وهو المطلوب

(٣)

« نظرية ١٢ »

إذا اختلفت زاويتان في مثلث فالزاوية الكبرى يقابلها الضلع الأكبر



(شكل ٢٨)

(القرص) المثلث $ا ب ح$ فيه الزاوية $ا ح ب$ أكبر من الزاوية $ا ب ح$

(المطلوب اثباته) أن الضلع $ا ب$ أكبر من الضلع $ا ح$
(البرهان) ان لم يكن $ا ب$ أكبر من $ا ح$ فاما ان يساويه واما أن يكون أصغر منه

فان كان $ا ب = ا ح$

لزم أن تكون $ا ح ب = ا ب ح$

وهذا خلاف القرض

وان كان $ا ب$ أصغر من $ا ح$

لزم أن تكون $ا ح ب > ا ب ح$ أصغر من $ا ح ب$

وهذا خلاف القرض ايضا

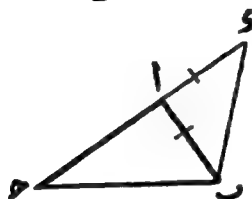
وعلى ذلك فالضلع $ا ب$ لا يمكن أن يساوي $ا ح$ كما أنه لا يمكن أن يكون أصغر منه

اذن يجب أن يكون $ا ب$ أكبر من $ا ح$

وهو المطلوب

« نظرية ١٣ »

أى ضلع في المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين



(شكل ٢٩)

(المفروض) أن $ا ب ح$ مثلث

(المطلوب اثباته) أن أحد الاضلاع وليكن $ب ح$ أصغر من $ا ب + ا ح$

(البرهان) نمد $ا ح$ على استقامته ونأخذ على امتداده البعد $ا و$ يساوى $ا ب$ ثم نصل $و ب$

فن حيث أن $ا ب = ا و$

تكون $ا ب > ا و = ا ب + ا و$ (نظرية ٦)

ولكن $ا ب و$ أصغر من $ا ح و$

اذن $ا ب و$ أصغر من $ا ح و$

اى ان $ا ح و$ أصغر من $ا ح و$

وعلى ذلك قفى $\triangle ا ب ح$

يكون $ب ح$ أصغر من $ا ح$ (نظرية ١٢)

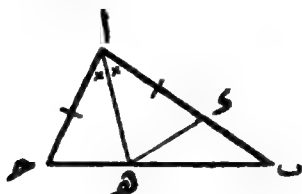
ولكن $ا ح + ا ب = ا ح و$

اذن $ب ح$ أصغر من $ا ح + ا ب$

اى ان $ب ح$ أصغر من $ا ح + ا ب$ وهو المطلوب

« نظرية ١٤ »

اى ضلع فى المثلث اكبر من فرق الضلعين الآخرين



(شكل ٣٠)

(المفروض) ان AB ح مثلث مختلف الاضلاع

(المطلوب اثباته) ان أحد الاضلاع وليكن B ح $AB < AC$

(البرهان) ننصف AB ح بالمستقيم AD ثم نقيس على AC

البعد $AD = AC$ ح ونصل من D الى C

فى المثلثين ADC و ADB ح

بالعمل

$$AD = AD$$

مشارك بين المثلثين

بما أن

$$AD = AD$$

بالعمل

يتساوى المثلثان ADC و ADB ح من عامة الوجوه (نظرية ٤)

ويكون $AD = AC$ ح

وفى $\triangle ABC$ ح

(نظرية ١٣)

$$AB < AD + DC$$

$$AB < AD + AC$$

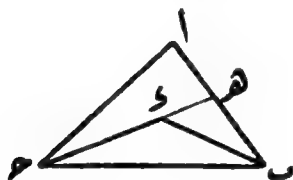
اى أن $AB < AC$ ح

ولكن $AD = AC$ ح $AD = AC$ ح

اذن $AB < AC$ ح وهو المطلوب

« نظرية ١٥ »

إذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصلت بطرفي أحد اضلاعه كان مجموع المستقيمين اللذين وصلاهما أصغر من مجموع ضلعي المثلث المحيطين بهما وكانت الزاوية المحصورة بين هذين المستقيمين أكبر من الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث



(شكل ٣١)

(المفروض) ان $أ ب ح$ مثلث وان نقطة $د$ داخله

(المطلوب اثباته) ان $د + ح > ب + و$ ان $د + ح > أ + ح$

وان $د + ح$ أكبر من $أ ب ح$

(البرهان) أولا - نمد $ح د$ الى ان يقابل $أ ب$ في نقطة $هـ$

في $\triangle أ ب ح$ $ح د > أ + ح$

أو
وفي $\triangle د ب ح$ $د + ح > ب + و$ وبالجمع

يكون $د + ح + د + ح > ب + و + أ + ح + ح$

وبحذف المشترك $د + ح$ من طرفي المتباينة مع مراعاة ان

$$أ ب = د + ح$$

يكون $د + ح > ب + و$ وهو المطلوب

ثانياً - في Δ ا م ح

الزاوية الخارجة $\beta < \alpha$ زاوية α (نظرية ٩)

وفي Δ ب و هـ

الزاوية الخارجة ح و ب < زاوية و ه ب (نظرية ٩)

فن باب أولى تكون زاوية ح و ب < زاوية ا

وهو المطلوب

تمارين (٨)

(۱) ۱ ح مثلث نصف زوایا ۵ ح ۶ ح بمستقیم تلاقی

في نقطة و فاذا كان $a < b$ اح فرهن على أن $b < a$ و ح

(٢) برهن على ان الوتر أكبر الاضلاع في المثلث القائم الزاوية

(۳) ا ب ح و شکل رباعی ا ب ا صفر اضلاع ۶ ح و اکبرها

والمطلوب البرهنة على ان $\Delta 1$ أكبر من $\Delta 6$ $\Delta 7$ أكبر من $\Delta 5$

(٤) برهن على ان كلا من ساقى المثلث المتساوى الساقين اكبر

من نصف قاعدته

(۵) ا ب ح مثلث فاذا فرضت قطعة مثل و على ب ح فبرهن

على أن ١ و اصغر من نصف مجموع اضلاعه

(٦) ا ب ح مثلث فاذا فرضت أى نقطة مثل د فبرهن على

ان م + م + م + م < نصف مجموع اضلاعه

(٧) استخدم العمل المتبع في اثبات نظرية ١٤ لاثبات نظرية ١١

(٨) برهن على ان اطول اضلاع المثلث المنفرج الزاوية هو

الضلع المقابل للزاوية المنفرجة

(٩) $ا ب ح$ مثلث فاذا رسم من $ا$ العمود $ا و$ على $ب ح$ فبرهن على أن $ا ب < ب و$ و $ا و < ح و$

(١٠) $ا ب ح$ مثلث رسم فيه عمودان احدهما من $ب$ على $ا ح$ والثاني من $ح$ على $ا ب$ فاذا تلاقي هذان العمودان في نقطة $س$ داخل المثلث وكان $ا ب < ا ح$ فبرهن على ان $س ب < س ح$

(١١) $ا ب ح$ مثلث مد ضلعا $ا ب ٦ ا ح$ على استقامتهما نصف الزاويتان الخارجتان فاذا تلاقي هذا المنصفان في نقطة $هـ$ وكان $ا ب < ا ح$ فبرهن على ان $هـ ب > هـ ح$

(١٢) اذا قطع مستقيم ساقى مثلث متساوى الساقين $ا ب ٦ ا ح$ في نقطتي $س ٦ ص$ وقطع القاعدة $ب ح$ بمتدة نحو $ح$ فبرهن على ان $ا ص < ا س$

(١٣) برهن على ان المستقيم الذى يصل رأس مثلث متساوى الساقين بنقطة على امتداد قاعدته اكبر من كل من ساقى المثلث

(١٤) برهن على ان المستقيم الذى يصل رأس مثلث متساوى الساقين بنقطة على قاعدته اصغر من كل من ساقيه

(١٥) اثبت نظرية ١٤ باستخدام العمل المتبع في اثبات نظرية ١١

(١٦) مجموع أى ثلاثة اضلاع في شكل رباعى اكبر من ضلعه الرابع

(١٧) $ا ب ح$ مثلث فرضت داخله نقطة مثل $و$ فاذا كان $ا و = ب و$ ثم نصفت زاوية $ب ا و$ بمستقيم قطع $ب ح$ في نقطة مثل $هـ$ فبرهن على ان $ب هـ = هـ و ٦ ح و < ح و$

(١٨) $ا ب ح$ مثلث فاذا فرضت نقطة مثل $و$ على $ا ح$ فبرهن على ان $ب ا + ا ح < ب و + و ح$

(١٩) مجموع اضلاع الشكل الرباعى اكبر من مجموع قطريه واصغر من ضعف هذا المجموع

(٢٠) اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى رؤوس

زواياه بمستقيمت كان مجموع هذه المستقيمت أصغر من مجموع اضلاعه

(٢١) مجموع اى ضلعين فى المثلث اكبر من ضعف المستقيم المتوسط النصف للضلع الثالث

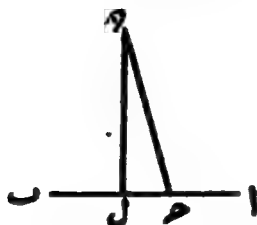
(٢٢) مجموع المستقيمت المتوسطة فى مثلث اصغر من مجموع اضلاعه واكبر من نصف هذا المجموع

(٢٣) برهن على ان مجموع قطرى الشكل الرباعى اكبر من مجموع اى ضلعين متقابلين فيه

(٢٤) برهن على ان مجموع قطرى الشكل الرباعى اصغر من مجموع المستقيمت الاربعه الواصلة من اى نقطة مفروضة (عدا نقطة تقاطع قطريه) الى رؤوس الشكل

« نظرية ١٦ »

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها مستقيم وعدة مواثل فان العمود يكون اقصر من كل مائل



(شكل ٢٢)

(المفروض) أن $هـ ل$ هو العمود النازل من النقطة المفروضة $هـ$
على المستقيم المعلوم $ا ب$ وأن $ح$ احد الموائل الواصلة منها الى $ا ب$
(المطلوب اثباته) أن $هـ ل$ أقصر من $هـ ح$
(البرهان) في $\triangle هـ ح ل$

$\angle هـ ح ل + \angle ح ل هـ < \angle هـ ح ا$ اصغر من قائمتين (نظرية ١٠)
وبما أن $\angle هـ ل ا = \angle هـ ل ح$ قائمة
بالفرض

فتكون $\angle هـ ح ل$ اصغر من قائمة (حادّة)

أى ان $\angle هـ ح ل$ اصغر من $\angle هـ ل ا$

ويكون $هـ ل$ اصغر من $هـ ح$
(نظرية ١٢)
وهو المطلوب

« نظرية ١٧ »

(وهى عكس نظرية ١٦)

إذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها جملة مستقيمتين تقابل
المستقيم المفروض فان أقصر هذه المستقيمتين هو العمود المرسوم
من النقطة على المستقيم المفروض

(المفروض) ان $هـ ل$ (شكل ٣٢) أقصر من كل مستقيم واصل
من نقطة $هـ$ الى $ا ب$

(المطلوب اثباته) ان $هـ ل$ عمودى على $ا ب$

(البرهان) أن لم يكن \angle عموديا على AB نرسم مستقيما آخر مثل \angle عموديا عليه (شكل ٣٢)

وبما تقدم في نظرية ١٦ يكون \angle أقصر المستقيمتين المرسومة من \angle الى AB

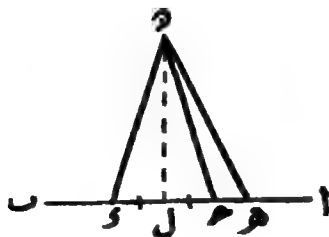
ولكن \angle أقصر المستقيمتين المرسومة من \angle الى AB بالفرض إذن $\angle = \angle$

وذلك لا يتأتى الا اذا انطبق المستقيمان \angle و \angle

ويكون على ذلك \angle عموديا على AB وهو المطلوب

« نظرية ١٨ »

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها عدة موازات فان المائتين المتساويي البعد عن موقع العمود متساويان والمائتين المختلفي البعد عن موقع العمود مختلفان وأكبرهما ما كان بعده أكبر



(شكل ٣٣)

(المفروض) ان \angle و \angle و \angle موازات مرسومة من نقطة

هـ الى ا ب وان ل ح = ل و ل هـ < ل و مع العلم بأن هـ ل
هو العمود النازل من هـ على ا ب

(المطلوب اثباته) ان هـ ح = هـ و وان هـ هـ < هـ و

(البرهان) أولا — في المثلثين هـ ل و ل هـ و

بما ان $\left. \begin{array}{l} \text{ل ح = ل و} \\ \text{هـ ل} \\ \text{بالفرض} \\ \text{مشارك بين المثلثين} \\ \text{بالقيام} \end{array} \right\}$

يتساوى المثلثان هـ ل و ل هـ و ل من عامة الوجوه (نظرية ٤)

ويكون هـ ح = هـ و وهو المطلوب

ثانيا — في \triangle هـ ل ح بما ان \triangle هـ ل ح قائمة يجب ان تكون

\triangle هـ ل ح حادة (نظرية ١٠)

وكذلك في \triangle هـ ل هـ بما ان \triangle هـ ل هـ قائمة يجب ان تكون

\triangle هـ ل هـ حادة (نظرية ١٠)

ومن حيث ان \triangle هـ ل ح حادة فتكون مجاورتها \triangle هـ ح هـ

منفرجة (نظرية ١)

اذن في \triangle هـ هـ ح تكون \triangle هـ ح هـ أكبر من \triangle هـ هـ ح

ويكون هـ هـ < هـ ح (نظرية ١٢)

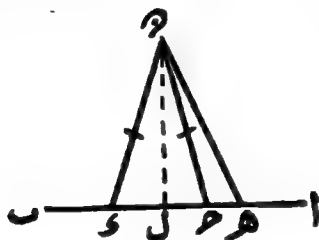
أو هـ هـ < هـ و وهو المطلوب

« نظرية ١٩ »

(وهي عكس نظرية ١٨)

إذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها عدة موائيل فكل مائلين

متساويين يكون بعدهما عن موقع العمود متساويين وكل مائلين مختلفين يكون بعدهما عن موقع العمود مختلفين واكبر المائلين بعده اكبر



(شكل ٢٤)

(المفروض) ان $AE = AF$ و AD موازن مرسومة من نقطة D الى AB وان $AD = AE = AF$ و $AD < AE$ مع العلم بان D ل هو العمود النازل من D على AB

(المطلوب اثباته) ان $AD = AE$ و ان $AD < AE$ (البرهان) أولا — ان لم يكن AD مساويا ل AE فاما ان يكون اكبر منه واما ان يكون اصغر منه

فان كان $AD < AE$

(نظرية ١٨) $AD < AE$ AD ان يكون $AD < AE$

وهذا خلاف الفرض

وان كان $AD > AE$

(نظرية ١٨) $AD > AE$ AD ان يكون $AD > AE$

وهذا خلاف الفرض ايضا

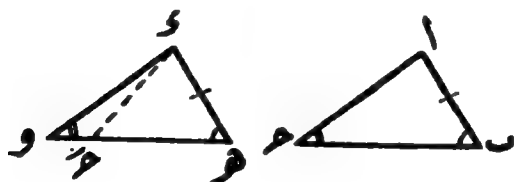
وعلى ذلك فالبعد AD لا يمكن ان يكون اكبر من AD كما انه

لا يمكن ان يكون اصغر منه

اذن يجب ان يكون ل ح مساوياً ل و
 ثانياً — ان لم يكن ل ه اكبر من ل و
 فاما ان يساويه واما ان يكون اصغر منه
 فان كان $ل = ل و$
 (نظرية ١٨) $ل و = ل و$ لازم ان يكون
 وهذا خلاف الفرض
 وان كان $ل و > ل و$
 (نظرية ١٨) $ل و > ل و$ لازم ان يكون
 وهذا خلاف الفرض ايضا
 وعلى ذلك فالبعد ل ه لا يمكن ان يساوى ل و كما انه لا يمكن
 ان يكون اصغر منه
 اذن يجب ان يكون ل ه اكبر من ل و وهو المطلوب

« نظرية ٢٠ »

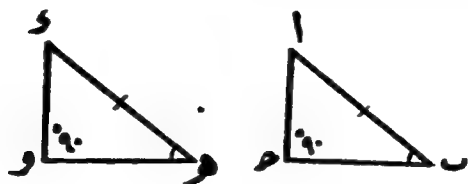
يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما زاويتان وضلع
 مقابل لاحدى هاتين الزاويتين كل مع نظيره



(شكل ٣٥)

(المفروض) ان $ا ب ح$ و $ا ب د$ و $ا ب هـ$ و مثلثان فيهما $ا ب = د$ و $ا ب ح = د$ و والضلع $ا ب = د$ و
 (المطلوب اثباته) ان $ا ب د = ا ب ح$ و $ا ب د = ا ب هـ$ و من عامة الوجوه
 (البرهان) نطبق $ا ب د$ على $ا ب ح$ على $ا ب$ و $ا ب د$ على $ا ب هـ$ و على شرط ان تقع
 النقطة $ا$ على النقطة $د$ و يأخذ الضلع $ا ب$ الاتجاه $د$ و
 وبما ان $ا ب = د$ و فتقع نقطة $ب$ على نقطة $هـ$
 وبما ان $ا ب$ انطبق على $د$ و $ا ب د = ا ب ح$ و $ا ب د = ا ب هـ$ و
 فيقع $ب$ ح على $هـ$ و
 وبعد ذلك ان وقت نقطة $ح$ على نقطة $د$ و انطبق المثلثان
 وثبت المطلوب
 وان لم تقع نقطة $ح$ على نقطة $د$ و وقت على $هـ$ و أو على امتداده
 حسبما يكون $ب$ ح اصغر او اكبر من $هـ$ و
 وللسهولة في العمل نقرض ان $ب$ ح $> هـ$ و وان نقطة $ح$
 وقت على $هـ$ و واخذت الوضع $ح'$ والضلع $ا$ ح اخذ الوضع
 $د$ ح'
 في $ا ب د$ و $ح'$ و الزاوية $هـ$ ح' و الخارجة اكبر من $د$ و $ح'$
 اى ان $ا ب د$ ح اكبر من $د$ و $هـ$ و وهذا خلاف القرض
 وكذلك ان وقت نقطة $ح$ عند التطبيق على امتداد $هـ$ و
 اختلفت الزاويتان $ا$ ح $ب$ و $ا$ ح' و $هـ$ و في المقدار وكانت $ا ب د$ ح
 اصغر من $د$ و $هـ$ و وهذا خلاف القرض أيضاً
 وعلى ذلك فالنقطة $ح$ لا يمكن ان تقع الا على نقطة $د$
 وبذلك ينطبق $ا ب د$ على $ا ب ح$ و $ا ب د = ا ب هـ$ و ويتساويان من
 عامة الوجوه وهو المطلوب

(نتيجة) يتساوى المثلثان القائمًا الزاوية من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما وتر وزاوية حادة كل مع نظيره



(شكل ٣٦)

(المفروض) ان المثلثين ١٦٧ و ٥٦٧ قائما الزاوية الاول في ٦ والثاني في ٥ وأن الوتر $١٦ = ٥٦$ والزاوية الحادة $١٦ = ٥٦$

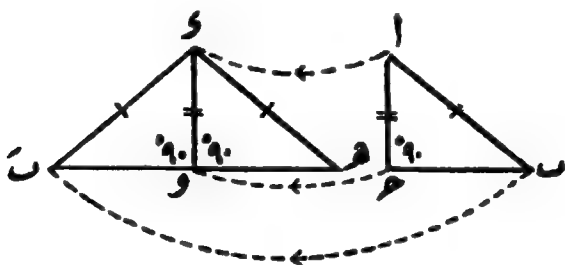
(المطلوب اثباته) ان المثلث $١٦٧ = ٥٦٧$ المثلث وهو من عامة الوجوه
(البرهان) في المثلثين ١٦٧ و ٥٦٧ و

$$\left. \begin{array}{l} \text{بالقيام} \\ \text{بالفرض} \\ \text{بالفرض} \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١٦ = ٥٦ \\ ١٦ = ٥٦ \\ ١٦ = ٥٦ \end{array}$$

فيطبق $\triangle ١٦٧$ على $\triangle ٥٦٧$ و
وبذلك يتساويان من عامة الوجوه
(نظرية ٢٠)
(وهو المطلوب)

« نظرية ٢١ »

يتساوى المثلثان القائمًا الزاوية من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما وتر وضلع كل مع نظيره



(شكل ٣٧)

(المفروض) ان المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ قائما الزاوية الاول
 في $\angle C$ والثاني في $\angle C'$ وان الوتر $AB = A'B'$ والوتر $BC = B'C'$
 = الضلع AC و
 (المطلوب اثباته) ان المثلث $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ المثلث $\triangle ABC$ و من
 عامة الوجوه

(البرهان) نضع المثلث $\triangle A'B'C'$ بجانب المثلث $\triangle ABC$ بحيث
 يقع الضلع $A'B'$ على امتساويه AC و يأخذ المثلث $\triangle A'B'C'$ ح الوضع
 AB' و

بما ان كلا من $\angle A$ و $\angle A'$ قائمة
 يكون المستقيم AB' على استقامة AC ويكون $\angle C = \angle C'$ مثلثا فيه
 الضلع $AC = A'C'$ (لان كلا منهما AB)

اذن $\angle B = \angle B'$ و $\angle C = \angle C'$ (نظرية ٦)

أى ان $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ و

وعلى ذلك ففى المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ و

$\left. \begin{array}{l} \text{بالقيام} \\ \text{من حيث ان} \\ \text{بالاثبات} \\ \text{بالفرض} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ا ح ب} = \text{د ه و ه} \\ \text{ا ح ب} = \text{د ه و ه} \\ \text{ا ح ب} = \text{د ه و ه} \\ \text{ا ح ب} = \text{د ه و ه} \end{array}$

فينتطبق المثلث ا ب ح على المثلث د ه و ه
 وبذلك يتساويان من عامة الوجوه
 وهو المطلوب

تمارين (٩)

(١) نقطة ح هي منتصف المستقيم ا ب والمطلوب البرهنة على ان العمودين النازلين من ا ب على اى مستقيم آخر يمر بها متساويان

(٢) ا ب ح د ه و ه مثلثان متساويان من عامة الوجوه فاذا رسم ا س عموديا على ب ح ورسم د ص عموديا على ه و فبرهن على ان ا س = د ص

(٣) اذا فرضت نقطة على منتصف زاوية فبرهن على ان العمودين النازلين منها على ضلعي الزاوية متساويان

(٤) ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح فاذا نصفت القاعدة ب ح فى نقطة د فبرهن على ان العمودين النازلين من هذه النقطة على ساقى المثلث متساويان

(٥) ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح والمطلوب البرهنة على ان العمودين النازلين من ب ح على ساقى المثلث متساويان

(٦) في المسألة السابقة اذا فرض ان العمودين تلاقيا في نقطة س

فبرهن على أن $س ب = س ح$

(٧) ا ب ح مثلث متساوي الساقين رسم فيه المستقيم ا و عموديا

على ب ح والمطلوب البرهنة على ان المثلث ب ا و =

المثلث ح ا و من عامة الوجوه

(٨) اذا فرضت نقطة مثل د وكان العمودان النازلان منها على

ضلعى زاوية مفروضة ب ا ح متساويين فبرهن على ان د ا

ينصف هذه الزاوية

(٩) اذا نصفت قاعدة مثلث بنقطة وكان العمودان النازلان منها

على ضلعى المثلثين الآخرين متساويين فبرهن على ان المثلث

متساوى الساقين

(١٠) اذا كان العمودان النازلان من نهايتى قاعدة مثلث على ضلعيه

الآخرين متساويين فبرهن على ان المثلث متساوى الساقين

« نظرية ٢٢ »

اذا ساوى ضلعان في مثلث نظيرهما في مثلث آخر وكانت الزاوية

المحصورة بين ضلعى المثلث الاول أكبر من نظيرتها في الثانى كان الضلع

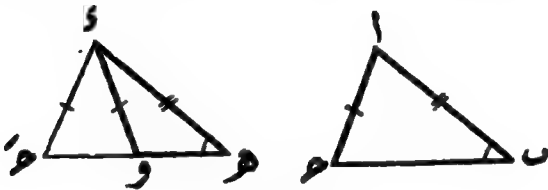
الثالث من المثلث الاول أكبر من نظيره في المثلث الثانى

(المفروض) ان المثلثين ا ب ح و د ه و فيها الضلع ا ب =

د ه و ا ح = د و و ب > ه ا أكبر من د ه و

المطلوب اثباته ان ب ح > ه و

(البرهان) قبل الشروع في اثبات هذه النظرية نجب معرفة ما تساويه $\triangle B$ بالنسبة الى نظريتها $\triangle H$ فتارة تقرر انهما متساويتان وتارة تقرر ان $\triangle B$ اكبر من $\triangle H$ وتارة تقرر ان $\triangle B$ اصغر من $\triangle H$ لان لكل حالة طريقة خاصة ووضع خاص لاثباتها
الحالة الاولى - عندما تكون $\triangle B = \triangle H$ (شكل ٣٨)



(شكل ٣٨)

نطبق المثلث $\triangle B$ ح على $\triangle H$ وبحيث تقع النقطة ١ على النقطة ٤ ويقع الضلع $\triangle B$ على مساويه $\triangle H$
وبما ان الضلع $\triangle B$ وقع على $\triangle H$ وكانت $\triangle B$ اكبر من $\triangle H$ وبالفرض فلا بد ان يقع $\triangle B$ ح على يسار $\triangle H$ و يأخذ الوضع $\triangle B$ ح'
وبما ان $\triangle B$ ح وقع على $\triangle H$ وقد سلمنا بأن $\triangle B = \triangle H$ فلا بد أن يقع $\triangle B$ ح على $\triangle H$ و يأخذ المثلث $\triangle B$ ح الوضع $\triangle B$ ح'

ويكون $\triangle B$ ح' $<$ $\triangle H$ (لان الكل اكبر من الجزء)
اي ان $\triangle B$ ح $<$ $\triangle H$ وهو المطلوب

(الحالة الثانية) عندما تكون $\triangle B$ اكبر من $\triangle H$ (شكل ٣٩)



(شكل ٣٩)

نطبق المثلث $أ ب ح$ على المثلث $أ' ب' ح'$ و فبعد ان تقع النقطة $أ$
على النقطة $أ'$ ويقع الضلع $أ ب$ على $أ' ب'$ و يقع $أ ح$ على يسار $أ' ح'$ و
ويأخذ الوضع $أ' ح'$ قول

بما ان $أ ب$ وقع على $أ' ب'$ وقد سألنا بأن $أ ب$ اكبر من $أ' ب'$ فلا
بد ان يقع $ب$ ح أسفل $ب'$ و يأخذ المثلث $أ ب ح$ الوضع $أ' ب' ح'$
ثم ننصف $أ' ب'$ و $أ' ح'$ بالمستقيم $أ' د$ الذي يقابل $أ' ح'$ في $د$
ونصل بين $د$ و $ب'$

ففي المثلثين $أ' د ب'$ و $أ' د ح'$

بما ان $\left. \begin{array}{l} أ' د = أ' د \\ د ب' = د ح' \\ \text{بالفرض} \\ \text{مشارك بين المثلثين} \end{array} \right\}$

$أ' د ب' = أ' د ح'$ بالعمل

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه

و ينتج من تساويهما ان $أ' د = د ح'$

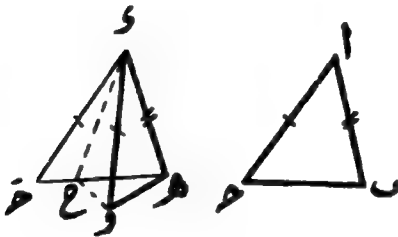
وفي $\triangle أ' د ب'$

(نظرية ٤)

$أ' د + د ح' < أ' ب'$

(نظرية ١٣)

فيكون $هـ + ح < و$
 أى ان $هـ < و - ح$
 أو $ب < و - هـ$ وهو المطلوب
 (الحالة الثالثة) عند ما تكون $ب > اصغر من و$ (شكل ٤٠)



(شكل ٤٠)

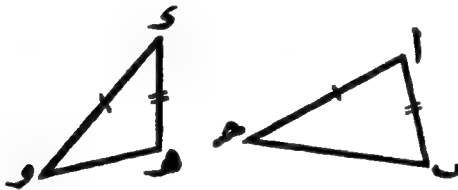
نطبق المثلث $ا ب ح$ على المثلث $و هـ و$ كما تقدم في الحالتين
 السابقتين فبعد ان تقع النقطة $ا$ على النقطة $و$ ويقع الضلع $ا ب$ على مساويه
 $و هـ$ ويقع $ح$ على يسار $و$ ويأخذ الوضع $و ح$ نقول
 بما ان $ا ب$ وقع على $و هـ$ وقد سلمنا بأن $ب > اصغر من و$
 $و$ فيقع الضلع $ب ح$ أعلى $و هـ$ ويأخذ المثلث $ا ب ح$ الوضع
 $و هـ ح$

ثم نستمر في البرهنة بنفس الطريقة المتبعة في اثبات الحالة الثانية
 وبذلك يكون $ب < و - هـ$ وهو المطلوب

د نظرية ٢٣

(وهي عكس نظرية ٢٢)

إذا ساوى ضلعان في مثلث نظيريهما في مثلث آخر وكان الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من نظيره في المثلث الثاني كانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الاول اكبر من نظيرتها في المثلث الثاني



(شكل ٤١)

(المفروض) ان المثلثين ABC و DEF وفيهما الضلع $AB = DE$ و $AC > DF$ و $BC < EF$ و

(المطلوب اثباته) ان $\angle A > \angle D$ اكبر من $\angle E$ و

(البرهان) ان لم تكن $\angle A > \angle D$ اكبر من $\angle E$ و فاما ان

تساويها واما ان تكون اصغر منها

فان كانت $\angle A > \angle D = \angle E$ و

كان المثلث $ABC =$ المثلث DEF و (نظرية ٤)

ولزم ان يكون $\angle B = \angle E$ و

وهذا خلاف الفرض

وان كانت $\angle A > \angle D$ اصغر من $\angle E$ و

لزم ان يكون $\angle B$ ح اصغر من $\angle D$ و
وهذا خلاف الفرض ايضاً
وعلى ذلك فالزاوية $\angle B$ ح لا يمكن ان تساوى الزاوية $\angle D$ و
كما انه لا يمكن ان تكون اصغر منها
اذن يجب ان تكون $\angle B$ ح اكبر من $\angle D$ و
وهو المطلوب

« نظرية ٢٤ »

اذا ساوى ضلعان في مثلث نظريهما في مثلث آخر وكانت احدى
الزوايا المقابلة لضع من الضلعين المتساويين تساوى نظريتها في المثلث
الثاني كانت الزاوية المقابلة للضع الآخر تساوى نظريتها أو تكملها
وفي حالة التساوى يكون المثلثان متساويين من عامة الوجوه



(شكل ٤٢)

(المفروض) ان المثلثين $\triangle DML$ و $\triangle SOH$ وفيهما الضلع $\angle L = \angle H$
 $\angle D = \angle S$ و $\angle M = \angle O$ و $\angle L = \angle O$ و $\angle S = \angle H$
(المطلوب اثباته) ان $\triangle M$ تساوى $\triangle O$ أو تكملها وانه في حالة
التساوى ينطبق المثلث $\triangle L$ على المثلث $\triangle H$ و

(البرهان) الزاوية ل ك م المحصورة بين الضلعين المشار اليهما
 اما ان تساوى نظيرتها د و اولا تساويها
 فان كانت د ل ك م = د ه و
 كان المثلث ل ك م = المثلث ه و و من عامة الوجوه (نظرية ٤)
 وتكون د م = د و

[يحسن بالطالب هنا ان يرجع الى المثلثين المتساويين ل ك م ١ ٦ ا ب ح
 (شكل ٤٢) اللذين فيها ا ب = ل ك ١ ٦ ا ح = ك م ١ ٦ ب د = د ل]
 وان كانت د ل ك م لا تساوى د ه و و بأن كانت الاولى
 اكبر من الثانية مثلا نطبق المثلث ه و ه و على المثلث ل ك م كما فعلنا
 عند اثبات الحالة الاولى من نظرية ٢٢ فيأخذ المثلث ه و ه و
 الوضع ك ل و

ومن حيث ان د و = ك و

فيكون ك م = ك و

وتكون د ك و' م = د م

ولكن د ك و' م تكمل د ك و' ل (نظرية ١)

اذن د م تكمل د ك و' ل

اي ان د م تكمل د و وهو المطلوب

تمارين (١٠)

(١) ا ب ح د شكل رباعي فيه ا د = ب ح ١ ٦ ا و ح اكبر

من د ب ح د والمطلوب البرهنة على ان ا ح < ب د

(٢) ا ب ح مثلث اخذ على ضاميه ا ب ١ ٦ ا ح البعدان المتساويان

ب و هـ فاذا كان $ا < ا ح$ فبرهن على ان
 $ب < ب ح$

(٣) ا ب ح مثلث مد ضلعه ا ب هـ الى و هـ بحيث
 ان ب و = ح هـ فاذا كان $ا < ا ح$ فبرهن على ان
 $ح و < ب هـ$

(٤) ا ب ح مثلث فيه $ا < ا ح$ فاذا فرض ان و منتصف
 ب ح فبرهن على ان $ا و$ حادة

(٥) ا و المستقيم المتوسط للمثلث ا ب ح فاذا فرضت أى نقطة
 هـ على ا و وكان $ا ب < ا ح$ فبرهن على ان $ب هـ < ح هـ$

(٦) ا ب ح مثلث اخذ على ضلعيه ا ب هـ ا ح البعدان المتساويان
 ب و هـ فاذا كان $ب هـ < ح و$ فبرهن على ان $ا ب < ا ح$

(٧) ا ب ح و شكل رباعى فيه $ا و = ب ح$ ا ح $< ب و$
 والمطلوب البرهنة على ان $ا و$ ح اكبر من $ب ح$

(٨) ا ب ح و شكل رباعى فيه $ا و = ب ح$ ا ب $> ح و$
 والمطلوب البرهنة على ان $ا و$ ح اكبر من $ا ح$

(٩) ا ب ح و شكل رباعى فيه $ا و = ب ح$ ا و ح اكبر
 من $ب ح$ والمطلوب البرهنة على ان $ا و$ ح اكبر
 من $ب و$

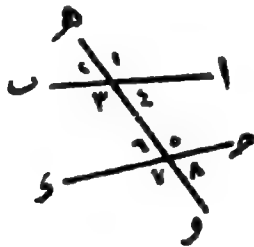
(١٠) ا ب ح مثلث مد ضلعه ا ب هـ الى و هـ بحيث ان ب و
 = ح هـ فاذا كان $ح و < ب هـ$ فبرهن على ان $ا ب < ا ح$

الباب الرابع

في المتوازيات

(تعريف) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان في مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدا

(بديهية) لا يمكن ان يلمس نقطة خارج مستقيم الاستقيم واحد يوازيه
(تعاريف) اذا قطع المستقيم h و المستقيمين a و b ح و
نشأ عن هذا التقاطع ثمانى زوايا تعرف باسماء خاصة اصطلاح بها
على تسميتها



(شكل ٤٣)

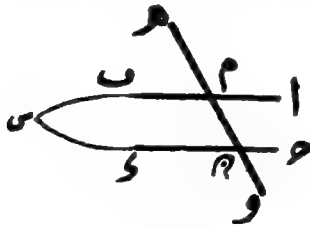
فى شكل (٤٣)

- (١) الزوايا ١ و ٢ و ٧ و ٨ تسمى خارجة
- (٢) والزوايا ٣ و ٤ و ٥ و ٦ تسمى داخلية
- (٣) والزوايا ١ و ٧ تسميان متبادلتين من الخارج وكذا الزوايا ٢ و ٨

- (٤) والزوايا ٣ و ٥ تسميان متبادلتين من الداخل وكذا ٤ و ٦
 (٥) والزوايا ١ و ٥ تسميان متناظرتين وكذا ٢ و ٦ و ٣ و ٧
 (٦) والزوايا ١ و ٨ تسميان متجاورتين من الخارج وكذا ٢ و ٧
 (٧) والزوايا ٤ و ٥ تسميان متجاورتين من الداخل وكذا ٣ و ٦

« نظرية ٢٥ »

إذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك ان زاويتين متبادلتين
 داخلتين أو خارجتين متساويتان كان المستقيمان متوازيين



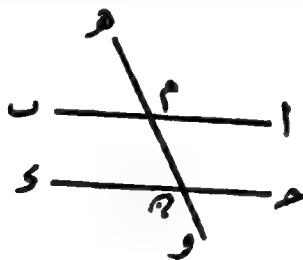
(شكل ٤٤)

(المفروض) ان المستقيم ج و يقطع المستقيمين أ ب ج و د في م
 و وان الزاويتين المتبادلتين الداخلتين ب م د و ج م م متساويتان
 (المطلوب اثباته) ان أ ب يوازي ج و
 (البرهان) ان لم يكن أ ب موازيين فلا بد أن يتلاقيا في
 نقطة مثل م ويكون م م م مثلثاً

في المثلث $سم$ الزاوية الخارجة $ح$ $سم <$ الزاوية $ب$ $سم$
 وهذا يستحيل اذ انهما متساويتان بالفرض
 وقد نشأ المستحيل بفرضنا ان $ا$ $ب$ يتلاقى مع $ح$
 اذن لا يمكن تلاقيهما وبذا يكونان متوازيين وهو المطلوب
 (تنبيه) عندما يفرض تساوى زاويتين متبادلتين من الخارج مثل
 زاويتي $ا$ $هـ$ $و$ $د$ نستمر في الاثبات بأن نقول
 ان $ا$ $د = ا$ $هـ$ $ب$ بالتقابل بالرأس
 $ب$ $د = د$ $و$ $هـ$ $ا$ $ب$ $د$
 اذن $ا$ $ب$ $د = ا$ $هـ$ $ب$ $د$
 وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل
 اذن $ا$ $ب$ يوازي $ح$ $د$ وهو المطلوب

« نظرية ٢٦ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك ان زاويتين متناظرتين
 متساويتان أو ان مجموع اى زاويتين متجاپتين داخلتين او خارجتين
 يساوى قائمتين كان المستقيمان فى كلتا الحالتين متوازيين



(شكل ٥٤)

(الفروض) ان المستقيم $هـ$ و يقطع المستقيمين $ا ب$ و $ج د$ في $هـ$ وكانت

$$\angle م١ د = \angle ح د م$$

$$\text{أو } \angle م١ د = \angle د م ح + \angle م د ح$$

$$\text{أو } \angle م١ د = \angle د ح و + \angle ح د م$$

(المطلوب اثباته) انه في كل حالة من الاحوال الثلاثة يكون المستقيمان $ا ب$ و $ج د$ متوازيين

(الحالة الاولى) $\angle م١ د = \angle م د ح$ بالتقابل بالرأس

$$\angle م١ د = \angle ح د م \quad \text{بالفرض}$$

$$\text{اذن } \angle م١ د = \angle م د ح$$

وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل

اذن $ا ب$ يوازي $ج د$ وهو المطلوب

(الحالة الثانية) $\angle م١ د = \angle م د ح + \angle م د ح$ (نظرية ١)

$$\angle م١ د = \angle د م ح + \angle م د ح \quad \text{بالفرض}$$

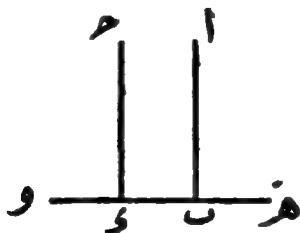
$$\text{اذن } \angle م١ د = \angle م د ح$$

وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل

اذن $ا ب$ يوازي $ج د$ وهو المطلوب

(الحالة الثالثة) نستخدم في اثبات الحالة الثالثة نفس الطريقة المتبعة في اثبات الحالة الثانية وبذلك يثبت المطلوب

(نتيجة) المستقيمان العمودان على ثالث يكونان متوازيين



(شكل ٤٦)

(المفروض) ان كلا من $ا$ و $ح$ عمودى على $و$

(المطلوب اثباته) أن $ا$ و $ح$ يوازى $و$

(البرهان) $\angle و ح ا = \angle و ح ح$ بالقيام

وهاتان الزاويتان متناظرتان

اذن $ا$ و $ح$ يوازى $و$ (نظرية ٢٦) ويثبت المطلوب

تعاريف



(شكل ٤٧)

١ - علمنا فيما مضى ان الشكل الرباعى

هو مضلع يحيط به اربعة اضلاع مثل $ا ب ح د$

(شكل ٤٧)

ويقال للمستقيم الذى يصل رأسين متقابلين فيه القطر مثل $ا ج$

٢ - يقال للشكل الرباعى أنه

متوازى اضلاع اذا كانت اضلاعه

المتضابلة متوازية مثل $ا ب ح د$



(شكل ٤٨)

(شكل ٤٨)

ففي هذا الشكل الرباعي ا ب يوازي و ح و ا يوازي ح و

٣ - يقال للشكل الرباعي انه شبه



(شكل ٤٩)

منحرف اذا كان فيه ضلعان متوازيان

وضلعان غير متوازيين مثل ا ب ح و

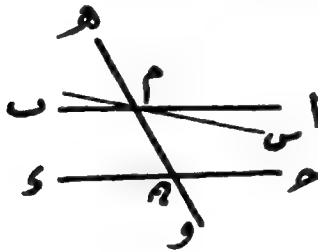
(شكل ٤٩)

ففي هذا الشكل ا ب يوازي و ح ولكن و ا لا يوازي ح و

« نظرية ٢٧ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين حدث من ذلك ان كل

زوايتين متبادلتين داخليتين او خارجيتين متساويتان



(شكل ٥٠)

(المفروض) ان المستقيم ا ب يوازي ح و وأن المستقيم ه و
يقطعها في ٢ و ٤

(المطلوب اثباته) ان $\angle ٢ = \angle ٤$ و $\angle ١ = \angle ٣$

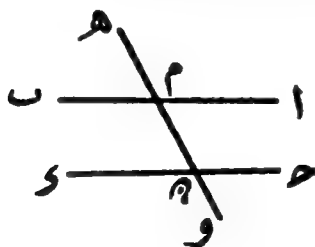
(البرهان) ان لم تكن الزاوية ٢ = ٤ تساوى الزاوية ١ = ٣

نرسم $\angle م$ كي يصنع مع $\angle م$ الزاوية $\angle م =$ الزاوية $\angle م$
 فيكون $\angle م$ يوازي $\angle م$ (نظرية ٢٦)
 ولكن $\angle م$ يوازي $\angle م$ بالفرض
 وبذلك يكون قد أمكن رسم مستقيمين يوازيان المستقيم $\angle م$ من
 نقطة واحدة وهذا مستحيل بداهة

اذن $\angle م \neq \angle م$ لا بد ان تساوى $\angle م$ وهو المطلوب
 (ملاحظة) الزوايا المتبادلة من الخارج تساوى الزوايا المتبادلة من
 الداخل بالتقابل بالرأس فتي ثبت تساوى الاولى يثبت تساوى الثانية

« نظرية ٢٨ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين حدث من ذلك ان كل
 زاويتين متناظرتين متساويتان وان مجموع اى زاويتين متجاورتين
 داخليتين أو خارجيتين يساوى قائمتين



(شكل ٥١)

(المفروض) ان المستقيم ا ب يوازي ج د وان المستقيم هـ و
 يقطعها في م ن

(المطلوب اثباته) ان $\angle ١ = \angle ٢$

وان $\angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤$

وان $\angle ٢ = \angle ٥ + \angle ٦$

(البرهان) اولاً - $\angle ١ = \angle ٢$ بالتقابل بالرأس

٦ $\angle ١ = \angle ٢$ بالتبادل (نظرية ٢٧)

اذن $\angle ١ = \angle ٢$ وهو المطلوب

ثانياً - $\angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤$ (نظرية ١)

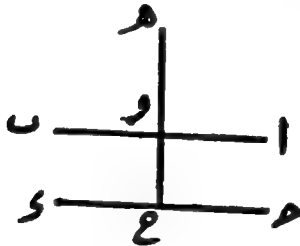
$\angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤$ بالتبادل (نظرية ٢٧)

اذن $\angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤$ وهو المطلوب

ثالثاً - يمكن بنفس الطريقة المتبعة في الحالة الثانية اثبات ان

$$\angle ٢ = \angle ٥ + \angle ٦$$

(نتيجة) كل مستقيم عمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر



(شكل ٥٢)

(المفروض) ان $ا ب$ يوازي $ج د$ وان $و ح$ عمودي على $ا ب$

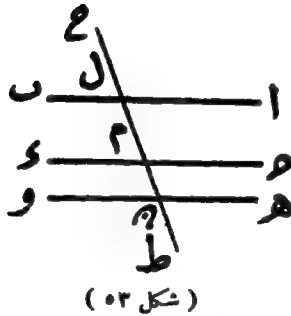
(المطلوب اثباته) ان $و ح$ عمودي على $ج د$ ايضاً

(٥)

(البرهان) $\angle ح ح و = \angle ا و ح$ بالتناظر
ولكن $\angle ا و ح = قائمة$ بالفرض
اذن $\angle ح ح و = قائمة$ كذلك
وبذا يكون $ح و ح$ عمودياً على $ح و$
وهو المطلوب

« نظرية ٢٩ »

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان



(شكل ٥٣)

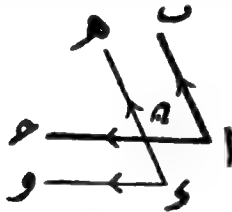
(المفروض) ان كلا من $ا ب$ و $ا ح و$ يوازي $ح و$
(المطلوب اثباته) ان $ا ب$ يوازي $ح و$
(البرهان) نرسم المستقيم $ح ط$ كي يقطع $ا ب$ في $ل$ و $ح و$ في $م$
و $ح و$ في $ح$

فما ان $ا ب$ يوازي $ح و$ بالفرض
تكون $\angle ح ح و = \angle ل ا ح$ بالتناظر
وكذلك بما ان $ح و$ يوازي $ح و$ بالفرض

تكون $\angle م ه و = \angle م ح ل$ بالتناظر
 اذن $\angle ا ل ح = \angle م ح ل$
 وهاتان الزاويتان متناظرتان
 اذن ا ب يوازي ح و (نظرية ٢٨) وهو المطلوب

« نظرية ٣٠ »

اذا وازى ضلعاً زاوية ضلعي زاوية اخرى وكان اتجاه ضلعي
 الزاوية الاولى في اتجاه ضلعي الزاوية الثانية كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٤)

(المفروض) ان ا ب ا ح و د ه و زاويتان فيهما الضلع ا ب
 يوازي د ه والضلع ا ح يوازي د و وان ا ب و د ه مرسومان في
 اتجاه واحد وكذا ا ح و د ه مرسومان في اتجاه واحد
 (المطلوب اثباته) ان $\angle ا ب ا ح = \angle د ه و$

(البرهان) $\angle ا ب ا ح = \angle د ه و$ بالتناظر

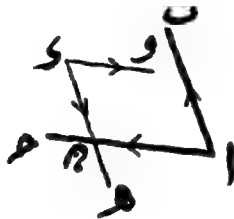
ب $\angle د ه و = \angle ا ب ا ح$ بالتناظر

اذن $\angle ا ب ا ح = \angle د ه و$

اي ان $\angle ا ب ا ح = \angle د ه و$ وهو المطلوب

« نظرية ٣١ »

إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى وكان اتجاه ضلعي
الزاوية الأولى يضاد اتجاه ضلعي الزاوية الثانية كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٥)

(المفروض) ان ب ا ح ٦ هـ و و زاويتان فيهما الضلع ا ر
يوازي و هـ والضلع ا ح يوازي و و وان ا ب ٦ و هـ مرسومان في
اتجاهين متضادين وكذا ا ح ٦ و و مرسومان في اتجاهين متضادين

(المطلوب اثباته) ان ب ا ح ٦ هـ و = د هـ و

البرهان (ب ا ح ٦ هـ و = د هـ و بالتناظر

٦ د و هـ و = د هـ و بالتبادلا

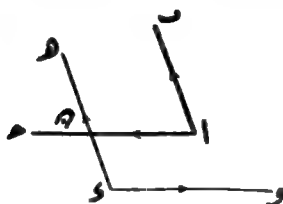
اذن ب ا ح ٦ هـ و = د هـ و

اي ان ب ا ح ٦ هـ و = د هـ و

وهو المطلوب

« نظرية ٣٢ »

إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى وكان اتجاه أحد ضلعي الزاوية في اتجاه الضلع الذي يوازيه واتجاه الضلع الثاني في اتجاه يصاد اتجاه الضلع الذي يوازيه كانت الزاويتان متكاملتين



(شكل ٥٦)

(المفروض) ان $ب ا ح$ و $ز و د$ زاويتان فيهما الضلع $ا ب$ يوازي $و د$ والضلع $ا ح$ يوازي $و د$ وان $ا ب ح$ و $و د ز$ مرسومان في اتجاه واحد والضلعين $ا ح$ و $و د$ مرسومان في اتجاهين متضادين

(المطلوب اثباته) ان $ب ا ح + ز و د = ١٨٠$

(البرهان) $ب ا ح + د ا ب = ١٨٠$

(نظرية ٢٨)

ولكن $ب ا ح = د ا ب$ بالتناظر

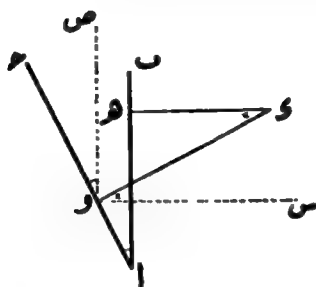
اذن $ب ا ح + ز و د = ١٨٠$

اي ان $ب ا ح + ز و د = ١٨٠$

وهو المطلوب

« نظرية ٣٣ »

إذا كان ضلعا زاوية عمودين على ضلعي زاوية أخرى وكانت كل
منهما حادة كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٧)

(المفروض) ان $\angle ا = \angle ج$ و $\angle هـ$ و $\angle د$ زاويتان فيهما الضلع $هـ$ و
عمودى على $ا ب$ والضلع $د$ و عمودى على $ج د$ وان كلا من
الزاويتين حادة

(المطلوب اثباته) ان $\angle ا = \angle ج$ و $\angle هـ = \angle د$

(البرهان) نرسم من نقطة $و$ المستقيم $و ص$ يوازي $ا ب$ والمستقيم $و س$
يوازي $ج د$ فيكون $و ص$ عمودياً على $و س$

وتكون $\angle ص و د + \angle د و س = \angle و$

ولكن $\angle ح و ص + \angle ص و د = \angle و$ بالفرض

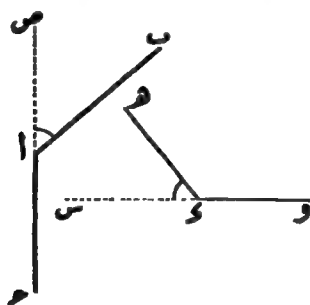
اذن $\angle ح و ص = \angle د و س$

ولكن $\angle ح و ص = \angle ا و س$ بالتناظر

بالتبادل	$\angle د و س = \angle ه و و$
اذن	$\angle و ا ب = \angle د ه و$
اى ان	$\angle ب ا ح = \angle د ه و$

« نظرية ٣٤ »

اذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعى زاوية أخرى وكانت كل منهما متفرجة كانت الزاويتان متساويتين



(شكل ٥٨)

(المفروض) ان $\angle ب ا ح$ و $\angle د ه و$ زاويتان فيهما الضلع $ه و$ عمودى على $ا ب$ والضلع $د و$ عمودى على $ا ح$ وان كلا من الزاويتين متفرجة

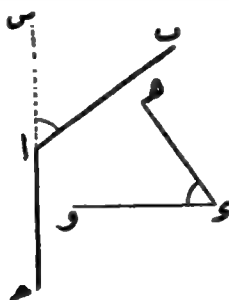
(المطلوب اثباته) ان $\angle ب ا ح = \angle د ه و$

(البرهان) عند الضلع $ح ا$ الى $ص$ والضلع $و د$ الى $س$ فيكون $و س$ عموديا على $ا ص$

ومن حيث ان كلا من الزاويتين $\angle \text{ب ا ص}$ و $\angle \text{ه و س}$ حادة
فتكون $\angle \text{ب ا ص} = \angle \text{ه و س}$ (نظرية ٣٣)
ولكن $\angle \text{ب ا ح} + \angle \text{ب ا ص} = \angle \text{و ه و}$
 $\angle \text{ه و س} + \angle \text{ه و و} = \angle \text{و ه و}$
اذن $\angle \text{ب ا ح} = \angle \text{ه و و}$ وهو المطلوب

« نظرية ٣٥ »

اذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعى زاوية اخرى وكانت
احدهما حادة والاخرى منفرجة كانت الزاويتان متكاملتين



(شكل ٥٩)

(المفروض) ان $\angle \text{ب ا ح}$ و $\angle \text{ه و و}$ زاويتان فيهما الضلع ه و
عمودى على ا ب والضلع و ه و وعمودى على ا ح وأن $\angle \text{ب ا ح}$ منفرجة
 $\angle \text{ه و و}$ حادة
(المطلوب اثباته) ان $\angle \text{ب ا ح} + \angle \text{ه و و} = \angle \text{و ه و}$

(البرهان) نمد ح ا الى س فيكون و و عموديا على ا س
وبما أن كلا من زاويتي ه و و و ب ا س حادة
فتكون $\angle ه و و = \angle ب ا س$ (نظرية ٣٣)
ولكن $\angle ب ا ح + \angle ب ا س = \angle ٢$ (نظرية ١)
اذن $\angle ب ا ح + \angle ه و و = \angle ٢$ وهو المطلوب

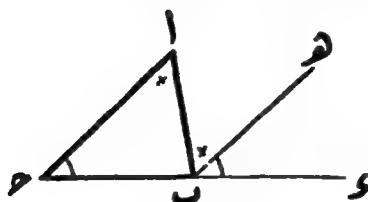
تمارين (١١)

- (١) ا ب ح و شكل رباعي رسم فيه القطر ا ح فاذا كانت
 $\angle ب ا ح = \angle ب ا و$ و $\angle و ا ح = \angle و ا ب$ فبرهن
على ان هذا الشكل الرباعي متوازي الاضلاع
- (٢) ا ب ح و متوازي اضلاع رسم فيه القطر ا ح ثم مد ب ح الى ه
والمطلوب يان ازواج الزوايا المتساوية مع يان السبب
- (٣) ا ب ح مثلث فاذا رسم المستقيم و ه يوازي ب ح و يقطع ا ب
في و و ا ح في ه وكانت $\angle ب = \angle و$ فبرهن على
ان $\angle ا و ه = \angle ا ب ح$
- (٤) برهن على ان مجموع زوايا متوازي الاضلاع يساوى اربع قوائم
- (٥) برهن على ان كل زاويتين متقابلتين في متوازي الاضلاع
متساويتان
- (٦) اذا كانت احدى زوايا متوازي الاضلاع قائمة فبرهن على ان
كلا من زواياه الثلاث الباقية قائمة كذلك
- (٧) ا ب ح و شكل رباعي فاذا كانت فيه $\angle ا = \angle ب + \angle و$
فبرهن على ان $\angle ب = \angle و$ كذلك

- (٨) اذا فرضت نقطة على منتصف زاوية ورسم منها مستقيم يوازي احد ضلعها فبرهن على ان المثلث الحادث متساوي الساقين
- (٩) ا ب ح و شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان والمطلوب البرهنة على ان مجموع زواياه يساوي اربع قوائم
- (١٠) اذا رسم من نقطة على منتصف زاوية مستقيمان يوازيان ضلعها ويقابلانها فبرهن على ان اضلاع الشكل الرباعي الحادث متساوية

« نظرية ٣٦ »

مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين



(شكل ٦٠)

(الفروض) ان ا ب ح مثلث
(المطلوب اثباته) ان

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$

(البرهان) نمد ح ب على استقامته الى د ونرسم ب ه يوازي ح ا

فتكون $\angle 1 = \angle 2$ بالتبادل

٦ $\angle 1 = \angle 3$ بالتناظر

اذن $\angle ا ب ح + \angle ا ح د = \angle ا ب د + \angle ا ب ح$
وبإضافة $\angle ا ب ح$ الى كل من طرفي هذه المساوية ينص ان
 $\angle ا ب د + \angle ا ب ح + \angle ا ح د = \angle ا ب د + \angle ا ب ح + \angle ا ب ح$
 $\angle ا ب د + \angle ا ب ح + \angle ا ح د$

ولكن $\angle ا ب د + \angle ا ب ح + \angle ا ح د = ٢٠٠$

اذن $\angle ا ب د + \angle ا ب ح + \angle ا ح د = ٢٠٠$

وهو المطلوب

نتيجة ١ - الزاوية الخارجة في أى مثلث تساوى مجموع زواياه الداخلة ما عدا المجاورة لها

نتيجة ٢ - اذا سادت زاويتان في مثلث نظيرتيهما في مثلث آخر كانت الزاوية الثالثة في المثلث الاول مساوية نظيرتها في المثلث الثانى

نتيجة ٣ - مجموع زوايا أى شكل رباعى يساوى اربع قوائم (المفروض) ان $ا ب ح د$ شكل رباعى

(المطلوب اثباته) ان مجموع زوايا الشكل تساوى أربع قوائم

(البرهان) نرسم $ب د$ فيقسم الشكل الرباعى الى المثلثين $ا ب د$ و $ب ح د$

ومجموع زوايا الشكل $ا ب ح د$

$=$ مجموع زوايا $\triangle ا ب د +$ مجموع زوايا $\triangle ب ح د$

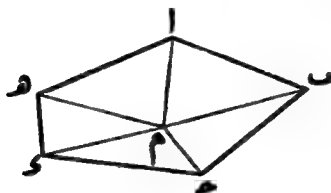
$=$ ٤ قوائم وهو المطلوب



(شكل ٦١)

« نظرية ٣٧ »

مجموع زوايا المضلع تساوى زوايا قوائمه بقدر ضعف عدد اضلاعه
ناقصاً أربع قوائمه



(شكل ٦٢)

(المفروض) أن أ ب ح د هـ مضلع عدد اضلاعه خمسة
(المطلوب اثباته) ان مجموع زوايا المضلع $= (٢ \times ٥ - ٤)$
من القوائمه

(البرهان) نأخذ نقطة داخل المضلع مثل م ونصل بينها وبين
رءوس المضلع بالمستقيمات أ م ب م ج م د م هـ م أ فيقسم
الشكل الى خمسة مثلثات

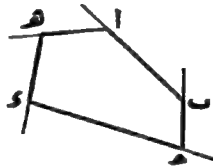
ويكون مجموع زوايا خمسة المثلثات الناشئة $= ٢ \times ٥$ قوائمه
ولكن مجموع زوايا المثلثات الخمسة هذه يزيد على مجموع زوايا
المضلع بمقدار الزوايا المجمعة حول نقطة م

وبما أن مجموع الزوايا المجمعة حول نقطة يساوى ٤ قوائمه
فمجموع زوايا المضلع ذى خمسة الاضلاع أ ب ح د هـ $=$
 $٢ \times ٥ - ٤$ من القوائمه

(تنبيه) هذا البرهان عام للمضلعات المحدودة مهما كان عدد أضلاعها فلو رمزنا اذن الى عدد الاضلاع بالرمز n
تكون مجموع زوايا مضلع عدد اضلاعه $n = 2 \times 90 - 180$
من القوائم

« نظرية ٣٨ »

اذا مدت اضلاع أى مضلع بالترتيب من جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة اربع قوائم



(شكل ٦٣)

(المفروض) ان n اضلاع عدد أضلاعه خمسة مدت أضلاعه على الترتيب فى جهة واحدة
(المطلوب اثباته) ان مجموع الزوايا الخارجة $= 4$ قوائم
(البرهان) عدد الزوايا الخارجة يساوى عدد زوايا المضلع الداخلة
وكل زاوية داخلة تكمل الزاوية الخارجة التى تجاورها
اذن مجموع زوايا المضلع الداخلة

+ مجموع زواياه الخارجة $= 2 \times 90 - 180$ قوائم

وتقدم ان مجموع زوايا المضلع الداخلة $= 2 \times 90 - 180$ من القوائم

اذن مجموع الزوايا الخارجة = ٤ قوائم وهو المطلوب
(تنبيه) هذا البرهان عام للمضلعات المحدودة مهما كان عدد اضلاعها

تمارين (١٢)

- (١) المطلوب اثبات نظرية (٣٦) يرسم المستقيم من ا ص يمر بنقطة ا ويوازي ب ح
- (٢) ا ب ح مثلث فيه $\angle 1 = \angle 2$ فاذا مد ب ح على استقامته الى د فبرهن على ان $\angle 2 = \angle 1$ ضعف $\angle 1$
- (٣) ما مجموع زوايا المضلع ذي خمسة الاضلاع وذى ستة الاضلاع وذى ثمانية الاضلاع
- (٤) ا ب ح مثلث فيه $\angle 1 = 58^\circ$ $\angle 2 = 62^\circ$ والمطلوب معرفة ما تساويه $\angle 3$
- (٥) ا ب ح د شكل رباعي فيه $\angle 1 = 37^\circ$ $\angle 2 = 111^\circ$ فاذا كانت $\angle 3 = \angle 4$ فأوجد ما تساويه كل منهما
- (٦) اذا مدت قاعدة مثلث من نهايتها وكانت الزاويتان الخارجتان الحادتان هما 105° 61° فأوجد ما تساويه كل من زوايا المثلث
- (٧) ا ب ح مثلث متساوى الساقين ($a = b$ ح) فاذا كانت $\angle 1 = 46^\circ$ فأوجد ما تساويه كل من زاويتي ب ٦ ح
- (٨) المطلوب ايجاد ما تساويه كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الاضلاع

(٩) ما مقدار ما تساويه كل زاوية داخلية وكل زاوية خارجة

في خمس منتظم

(١٠) ا ب ح د شكل رباعي مد ضلعا ا ب و ب ح على استقامتهما

فاذا تلاقيا في نقطة ه فبرهن على ان $\angle ه ب ح + \angle ه ح ب$

$$\angle د + \angle ا =$$

الباب الخامس

في الاشكال المتوازية الاضلاع

تعريف

١ - علمنا فيما مضى أن متوازي الاضلاع شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

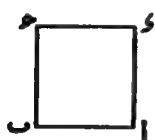


(شكل ٦٤)

٢ - يقال لمتوازي الاضلاع أنه مستطيل اذا كانت زواياه قوائم مثل $a = b = c = d$

(شكل ٦٤)

ففي هذا الشكل كل من $a > b > c > d$ يساوي قائمة



(شكل ٦٥)

٣ - يقال للمستطيل انه مربع اذا كانت اضلاعه كلها متساوية مثل $a = b = c = d$ (شكل ٦٥)

ففي هذا الشكل $a = b = c = d$

$$a = b = c = d$$



(شكل ٦٦)

٤ - يقال للمربع انه معين اذا كانت زواياه غير قوائم مثل $a = b = c = d$ (شكل ٦٦)

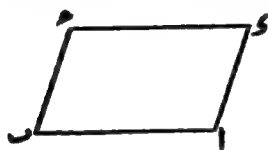
ففي هذا الشكل $a = b = c = d$

$a = b = c = d$ ولكن زواياه $a > b > c > d$ ليست بقوائم

٥ — يقال لشبه المنحرف أنه متساوي الساقين إذا كان ضلعا
غير المتوازيين متساويين

« نظرية ٣٩ »

في متوازي الاضلاع كل زوايين متقابلتين متساويتان



(شكل ٦٧)

(المفروض) أن $ا ب ح د$ متوازي اضلاع

(المطلوب اثباته) أن $\angle ا = \angle ب$ و $\angle ح = \angle د$

(البرهان) $\angle ٢ = \angle ١ + \angle ح$ (نظرية ٢٨)

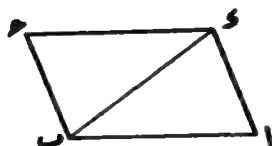
$\angle ٢ = \angle ١ + \angle ح$ (نظرية ٢٨)

$\angle ح = \angle ١$ إذن

وبالمثل ثبت أن $\angle ا = \angle ب$ وهو المطلوب

« نظرية ٤٠ »

في متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان والقطر
يقسمه الى مثلثين متساويين



(شكل ٦٨)

(المفروض) أن $AB \parallel CD$ و $AD \parallel BC$ رسم قطره AC

(المطلوب اثباته) أن $AB = CD$ و $AD = BC$

$$\triangle ABC = \triangle CDA$$

(البرهان) في المثلثين ABC و CDA

بما أن $\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle CDA \text{ بالتبادل} \\ \angle BAC = \angle DCA \text{ بالتبادل} \end{array} \right\}$ الضلع AC مشترك بين المثلثين

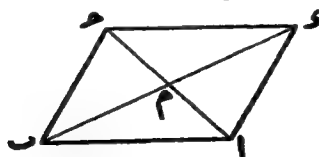
يتساوى المثلثان ABC و CDA (نظرية هـ)

ويكون $AB = CD$ و $AD = BC$ وهو المطلوب

(نتيجة) المستقيمان المتوازيان على بعد واحد في جميع امتدادهما

« نظرية ٤١ »

قطرا متوازي الاضلاع ينصف أحدهما الآخر



(شكل ٦٩)

(المفروض) ان $AB \parallel CD$ و متوازي أضلاع رسم قطراه AC
 BD و تقاطعا في نقطة M

(المطلوب اثباته) ان $AM = CM$ و $BM = DM$

(البرهان) في المثلثين AMB و CMD

(نظرية ٤٠)
 بما أن $AB \parallel CD$ و $AC \parallel BD$ بالتبادل
 بالتبادل $\angle BAC = \angle BDC$ و $\angle ABD = \angle ACD$

يتساوى المثلثان AMB و CMD من عامة الوجوه (نظرية ٥)
 ويكون $AM = CM$ و $BM = DM$ وهو المطلوب

« نظرية ٤٢ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا تساوى فيه كل
 زاويتين متقابلتين



(شكل ٧٠)

(المفروض) ان $AB \parallel CD$ و شكل رباعي وان $\angle A = \angle C$ و $\angle B = \angle D$

(المطلوب اثباته) ان $AB \parallel CD$ و متوازي اضلاع

(البرهان) نرمز الى كل من زاويتي α و β المتساويتين بالرمز α والزاويتين β و المتساويتين بالرمز β

فما ان مجموع زوايا اي شكل رباعي يساوي قائمتين

$$\text{تكون } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\text{ويكون } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\text{أي أن } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\text{اذن } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

ولكن زاويتي α و β متجاورتان من الداخل وكذا زاويتي α و β

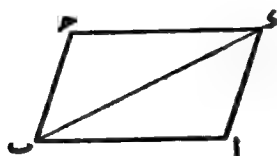
اذن $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ و $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$

ويكون $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ و متوازي اضلاع وهو المطلوب

« نظرية ٤٣ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا تساوى وتوازي فيه

ضلعان متقابلان



(شكل ٧١)

(المفروض) ان $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ و شكل رباعي فيه $\alpha + \beta = 180^\circ$ و $\alpha + \beta = 180^\circ$ و $\alpha + \beta = 180^\circ$

(المطلوب اثباته) ان $ا ب ح د$ متوازي اضلاع
(البرهان) نرسم القطر $ب د$ فيحدث المثلثان $ا ب د$ و $ب ح د$
في هذين المثلثين

$ا ب د = ب ح د$ بالفرض
بما أن $ب د$ مشترك بين المثلثين
 $ا ب د = ب ح د$ بالتبادل

يتساوى المثلثان $ا ب د$ و $ب ح د$ من عامة الوجوه (نظرية ٤)
وتكون $ا د = ب ح$
وهاتان الزاويتان متبادلتان
اذن $ا د$ يوازي $ب ح$

ويكون $ا ب ح د$ متوازي اضلاع وهو المطلوب
(نتيجة) اذا رسم عمودان متساويان على مستقيم وكنا في جهة
واحدة منه فان المستقيم الذي يصل طرفيهما يوازي المستقيم الاصل

« نظرية ٤٤ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا تساوى فيه كل ضلعين
متقابلين

(المفروض) ان الشكل $ا ب ح د$ (شكل ٧١) رباعي
وأن $ا ب = ب ح$ و $ا د = ب ح$
(المطلوب اثباته) أن $ا ب ح د$ متوازي اضلاع
(البرهان) نرسم القطر $ب د$ فيحدث المثلثان $ا ب د$ و $ب ح د$
في هذين المثلثين

$$\left. \begin{array}{l} \text{بأن} \\ \text{أ} \text{ ب} = \text{أ} \text{ ج} \text{ بالفرض} \\ \text{أ} \text{ ج} = \text{أ} \text{ د} \text{ بالفرض} \\ \text{أ} \text{ د} \text{ مشترك بين المثلثين} \end{array} \right\}$$

يتساوى المثلثان ب أ د و ج ح من عامة الوجوه (نظرية ٨)

$$\text{وتكون } \angle \text{أ ب د} = \angle \text{أ ج د}$$

$$\angle \text{أ ب د} = \angle \text{أ ج د}$$

ولكن زاويتي أ ب د و أ ج د متبادلتان وكذا زاويتي

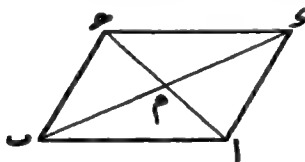
$$\angle \text{أ ب د} = \angle \text{أ ج د}$$

اذن أ ب يوازي أ ج و أ ج يوازي ب د

ويكون أ ب ح د متوازي اضلاع وهو المطلوب

« نظرية ٢٥ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا نصف أحد قطريه الآخر



(شكل ٧٢)

(المفروض) أن أ ب ح د شكل رباعي وان $\text{أ} \text{ م} = \text{أ} \text{ م}$

$$\text{أ} \text{ م} = \text{أ} \text{ م}$$

(المطلوب اثباته) أن أ ب ح د متوازي اضلاع

(البرهان) في المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$

$$\left. \begin{array}{l} \text{بالفرض} \\ \text{بالفرض} \\ \text{بالتقابل بالرأس} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle F \end{array}$$

يتساوى المثلثان $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ من عامة الوجوه (نظرية ٤)

ويكون $\angle A = \angle D$ و $\angle B = \angle E$ و $\angle C = \angle F$

وهاتان الزاويتان متبادلتان

اذن AB يوازي DE كما انه يساويه

اي ان AB و DE متوازي اضلاع (نظرية ٤٣) وهو المطلوب

تمارين (١٣)

(١) AB و CD مثلث متساوي الساقين ($AB = AC$) فاذا رسم

المستقيم EF يوازي القاعدة ويقطع الضلع AB في نقطة E

والضلع AC في F فبرهن على ان $EF = EC$

(٢) AB و CD متوازي اضلاع يشتركان مع متوازي الاضلاع BC و AD

في القاعدة BC والمطلوب البرهنة على ان المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$

AB و CD متساويان

(٣) برهن على ان منصفى زاويتين متجاورتين في متوازي اضلاع

متعامدان

(٤) برهن على ان منصفى زاويتين متقابلتين في متوازي اضلاع

متوازيان

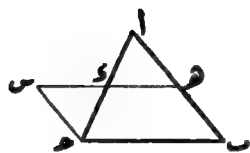
(٥) AB و CD متوازي اضلاع فاذا قاطع قطراه في نقطة M فبرهن

على انها تنصف أى مستقيم يمر بها وينتهى بضمين متقابلين

(٦) برهن على ان المستقيم الذي يصل منتصفى ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث

(المفروض) ان ا ب ح مثلث وان نقطة ه منتصف ا ب ونقطة و منتصف ا ح

(المطلوب اثباته)



(شكل ٧٣)

ان ه و يوازي ب ح

(البرهان) نمد ه و الى س

ونقيس البعد س ه = ه و ونصل

ح و س بالمستقيم ح س فيحدث

المثلثان ا ه و و ه ح س و

في هذين المثلثين

ه و = و س بالعمل

بما أن ه و = و س بالفرض

ه و = و س بالتقابل بالرأس

يتساوى المثلثان ا ه و و ه ح س و من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وينتج من تساويهما ان ح س = ه ا و ه ح س = و ا ه

ولكن ه ا = ه ح بالفرض والزوايتين و ح س و ه ا و

متبادلتان

اذن ح س يساوى و يوازي ه ب

أى أن ب ح س ه متوازي اضلاع

ويكون ه و يوازي ب ح وهو المطلوب

(٧) ا ب ح و شبه منحرف متساوى الساقين (ه ا = ب ح)

والمطلوب البرهنة على ان ا ب ح = و ا ب ح

(٨) $ا ب ح و$ شبه منحرف متساوى الساقين ($ا و = ب ح$)

فاذا نصف الضلع $ا ب$ فى نقطة $هـ$ والضلع $ح و$ فى نقطة $و$ فبرهن على ان $هـ و$ عمودى على $ا ب$

(٩) برهن على ان المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين متوازيين

فى متوازى الاضلاع يوازى ضلعيه الآخرين

(١٠) $ا ب ح و$ متوازى اضلاع فاذا نصف الضلع $ا ب$ فى نقطة $س$

والضلع $ح و$ فى نقطة $ص$ فبرهن على ان $ب س و س و$ متوازى اضلاع

(١١) برهن على ان قطرى المعين متعامدان

(١٢) برهن على ان المستقيمت المتوازية المحصورة بين مستقيمين

متوازيين كلها متساوية

(١٣) اذا تلاقى مستقيمان متساويان بمستقيم ثالث وكانا متوازيين وفى

جهة واحدة منه فان المستقيم الذى يصل طرفيهما يوازى

المستقيم الثالث

(١٤) برهن على أن المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين فى مثلث

يساوى نصف الضلع الثالث

[فى متوازى الاضلاع $ب ح س هـ$ (شكل ٧٣) الضلع

$س هـ = ح ب$ ولكن $هـ و$ يساوى نصف $س و$ اذن $هـ و$

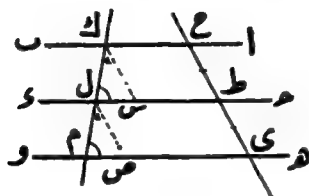
$=$ نصف $ب ح$]

(١٥) المطلوب البرهنة على ان المستقيمت التى تصل بين منتصفات

اضلاع مثلث تقسمه الى أربعة مثلثات متساوية

« نظرية ٤٦ »

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمت متوازية وكانت اجزائه المحصورة
بينها متساوية فإن الاجزاء المحصورة لأي مستقيم آخر يقطع هذه
المتوازيات تكون متساوية كذلك



(شكل ٧٤)

(الفروض) أن $ا ب ح$ و $و ح ط$ و مستقيمت متوازية وأن
 $ح ط ي$ يقطعها بحيث أن الجزء $ح ط = ط ي$ وأن $ك ل م$ يقطع
هذه المتوازيات

(المطلوب اثباته) $ك ل = ل م$

(البرهان) نرسم من نقطة $ك$ المستقيم $ك س$ يوازي $ح ي$ ومن
 $ل$ المستقيم $ل ص$ يوازي $ح ي$ أيضا فيحدث المثلثان $ك ل س$ و $ل م ص$
ومن حيث أن كلا من $ك ح ط$ و $ل م ص$ $ط ل$ و $م ص$ متوازي اضلاع

فيكون $\left. \begin{array}{l} ك س = ح ط \\ ل م = ط ي \end{array} \right\}$

ولكن $ح ط = ط ي$ بالفرض

اذن $ك س = ل م$

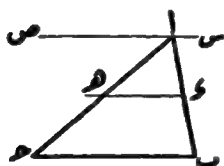
في المثلثين $ك ل س$ و $ل م ص$

بما أن $\left. \begin{array}{l} \text{ك ل ص} = \text{ل ص} \\ \text{ك ل ص} = \text{ل ص} \\ \text{ك ل ص} = \text{ل ص} \end{array} \right\}$ بالاثبات
 بالتناظر
 بالتناظر
 يتساوى المثلثان ك ل ص و ل ص
 وينتج من تساويهما أن ك ل = ل ص وهو المطلوب
 (نظرية ٢٠)

تمارين (١٤)

(١) برهن على أن المستقيم الذي ينصف أحد أضلاع مثلث ويوازي قاعدته ينصف ضلعه الثاني

(المفروض) أن ا ب ح مثلث وان نقطة د منتصف ا ب وان د ه يوازي ب ح ويقطع ا ح في ه
 (المطلوب اثباته) أن ا د = د ه
 (البرهان) نرسم من نقطة ا المستقيم ا ص يوازي ب ح
 فتكون المستقيمتان ا ص و ب ح متوازيتان
 ولكن نعلم فرضاً أن ا د = د ه
 إذن ا د = د ه (نظرية ٤٦)
 وهو المطلوب



(شكل ٧٥)

(٢) برهن على أن المستقيم الذي يصل منتصفى ضلعين في مثلث ينصف أى مستقيم يصل ضلعه الثالث والرأس المقابل له
 (٣) اذا وصلت منتصفات الاضلاع المجاورة في شكل رباعي فبرهن على أن الشكل الناتج متوازي اضلاع
 (٤) اذا وصل منتصفا كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي

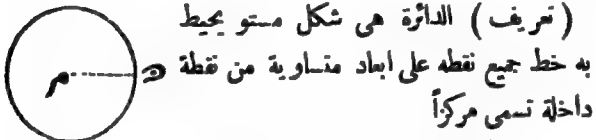
- فبرهن على ان المستقيمين الواصلين ينصف أحدهما الآخر
- (٥) ا ب ح د متوازي اضلاع ونقطة س منتصف الضلع ا ب ونقطة ص منتصف الضلع المقابل د ح والمطلوب البرهنة على ان د س 6 ب ص يقسمان القطر ا ح الى ثلاثة أقسام متساوية
- (٦) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الذى يصل منتصفى الضلعين غير المتوازيين فى شبه المنحرف يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيين ويوازيهما
- (٧) اذا انزل عمودان من نهائى قطر متوازي اضلاع على مستقيم خارج عنه فبرهن على أن مجموع هذين العمودين يساوى ضعف العمود النازل من منتصف هذا القطر على المستقيم المقروض
- (٨) اذا أنزلت أعمدة من رؤوس متوازي أضلاع على مستقيم خارج عنه فبرهن على ان مجموع العمودين النازلين من رأسين متقابلين يساوى مجموع العمودين الآخرين
- (٩) اذا فرضت نقطة على قاعدة مثلث متساوى الساقين وانزل منها عمودان على ساقيه فبرهن على أن مجموع هذين العمودين يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له
- (١٠) اذا فرضت نقطة على امتداد قاعدة مثلث متساوى الساقين وانزل منها عمودان على ساقيه فبرهن على ان فرق هذين العمودين يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له
- (١١) اذا فرضت نقطة داخل مثلث متساوى الاضلاع وأنزل منها أعمدة على اضلاعه الثلاثة فبرهن على ان مجموع هذه الاعمدة يساوى العمود النازل من احد رؤوس المثلث على الضلع المقابل له

الباب السادس

في الدعاوى العملية

الدعاوى العملية هي مجرد عمليات هندسية

وتستلزم هذه العمليات استعمال المسطرة والفرجار (البرجل) وسنردف كل عملية ببرهان نظري تطبيقاً على ما تقدم من الدعاوى النظرية



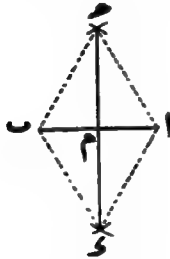
في شكل (٧٦) النقطة م ابعاده عن (شكل ٧٦)

جميع قط الخط الذي حولها متساوية وتسمى م بمركز الدائرة ويسمى م بنصف قطر الدائرة والخط المحدد للدائرة بمحيطها

(ملاحظة) يمكن بواسطة الفرجار رسم الدائرة وذلك بأن نركز بأحدى شعبتيه في نقطة ثابتة مثل م ثم نحرك شعبته الثانية حولها

« عملية ١ »

المطلوب تنصيف مستقيم محدود



(شكل ٧٧)

(المفروض) ان $أ ب$ هو المستقيم

(المطلوب عمله) تنصيف المستقيم $أ ب$

(العمل) نرکز في $أ$ و يبعد مناسب نرسم قوساً فوق $أ ب$ وآخر أسفله

ثم نرکز في $ب$ و بنفس البعد الاول نرسم قوسين تقطعان الاولين في

$ح ٦$ و $د ٦$ ثم نصل $ح ٦$ فيقطع $أ ب$ في نقطة $م$ فتكون $م$ هي منتصف $أ ب$

(البرهان) نصل $أ ح ٦$ و $ب ح ٦$ و $أ د ٦$ و $ب د ٦$

ففي المثلثين $أ ح ٦$ و $ب ح ٦$

بالعمل

$$أ ح ٦ = ب ح ٦$$

بالعمل

$$أ د ٦ = ب د ٦$$

$ح ٦$ و مشترك بين المثلثين

بما أن

(نظرية ٨)

يتساوى المثلثان $أ ح ٦$ و $ب ح ٦$

وينتج أن $\angle ١ ح و = \angle ٢ ح و$

أى أن $\angle ١ ح و = \angle ٢ ح و$

وكذلك فى المثلثين $١ ح و ٢ ح و$

بالعمل

$$\angle ١ ح و = \angle ٢ ح و$$

بما أن $٢ ح و ١ ح و$ مشترك بين المثلثين

بالاثبات $\angle ١ ح و = \angle ٢ ح و$

يتساوى المثلثان $١ ح و ٢ ح و$ (نظرية ٤)

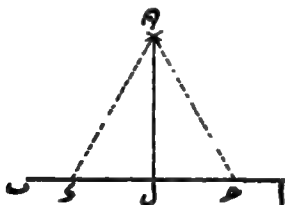
وينتج أن $٢ ح و = ١ ح و$

وهو المطلوب

أى أن $٢ ح و = ١ ح و$

« عملية ٢ »

المطلوب اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه



شكل (٧٨)

(المفروض) أن $١ ح و$ هو المستقيم المعلوم وأن $ل$ النقطة المفروضة عليه

(المطلوب عمله) اقامة عمود من $ل$ على $١ ح و$

(العمل) نركز فى $ل$ ونصنع قطر مناسب نعين التقاطعين $ح و ٢ ح و$

على $١ ح و$

ثم نركز في كل من $\angle \alpha$ و $\angle \beta$ وينصف قطر مناسب نرسم قوسين
تقاطعان في $\angle \gamma$ ثم نصل $\angle \gamma$ فيكون عموداً على α

(البرهان) نصل $\angle \gamma$ و $\angle \alpha$ و

ففي المثلثين $\angle \gamma$ و $\angle \alpha$ و

$\angle \gamma = \angle \alpha$ بالعمل
بما أن $\angle \gamma$ و $\angle \alpha$ مشترك بين المثلثين
 $\angle \gamma = \angle \alpha$ بالعمل

يتساوى المثلثان $\angle \gamma$ و $\angle \alpha$ (نظرية ٨)

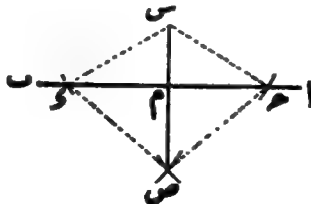
وينتج أن $\angle \gamma = \angle \alpha$ و

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

أي أن $\angle \gamma$ عمودى على α وهو المطلوب

« عملية ٣ »

المطلوب إسقاط عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة خارجة



(شكل ٧٩)

(المفروض) أن α مستقيم وأن نقطة γ خارجة عنه

(المطلوب عمله) إسقاط عمود من γ على α

(العمل) نركز في س و بنصف قطر مناسب نعين النقطتين ح و و على ا ب ثم نركز في كل من ح و و بنصف قطر مناسب نرمس قوسين أسفل المستقيم ا ب يتقاطعان في نقطة ص ثم نصل س ص قاطعاً للمستقيم ا ب في م فيكون س م عموداً على ا ب

(البرهان) نصل ح س و و س ح و و ح ص و و ص

ففي المثلثين ح س و و ح ص و

$$\left. \begin{array}{l} \text{ح س} = \text{و س} \text{ بالعمل} \\ \text{و ح ص} = \text{و ح ص} \text{ بالعمل} \\ \text{و س ص} \text{ مشترك بين المثلثين} \end{array} \right\} \text{بما أن}$$

(نظرية ٨) يتساوى المثلثان ح س و و ح ص و

وينتج أن $\angle \text{ح س و} = \angle \text{و ح ص}$

أي أن $\angle \text{ح س و} = \angle \text{و ح ص م}$

وفي المثلثين ح س م و و ح ص م

$$\left. \begin{array}{l} \text{ح س} = \text{و س} \text{ بالعمل} \\ \text{و ح ص م} \text{ مشترك بين المثلثين} \end{array} \right\} \text{بما أن}$$

$\angle \text{ح س م} = \angle \text{و ح ص م}$ بالاثبات

(نظرية ٩) يتساوى المثلثان ح س م و و ح ص م

وينتج أن $\angle \text{ح س م} = \angle \text{و ح ص م}$

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

أي أن س م عمودي على ا ب وهو المطلوب

« عملية ع »

المطلوب رسم زاوية تساوى زاوية معلومة



(شكل ٨٠)

(المفروض) ان $\angle ا ب ح$ الزاوية المعلومة

(المطلوب عمله) رسم زاوية تساوى الزاوية المعلومة

(العمل) نقرض مستقيماً مثل $و ح$ ونعين عليه نقطة مثل $م$ ثم

نرسم قوساً قطع $ب ا$ في $و$ و

$ب ح$ في $هـ$

ونرسم قوساً قطع $و ح$ في $ك$ ونرسم قوساً

قطع $ب ا$ في $و$ ونرسم قوساً قطع $ب ا$ في $و$ ونصل

$م$ فتكون $\angle م ك هـ$ هي الزاوية المطلوبة

(البرهان) في المثلثين $م ك هـ$ و $و ك هـ$

بالعمل

$$م ك = و ك$$

بالعمل

$$م هـ = و هـ$$

بالعمل

$$م هـ = و هـ$$

من حيث ان

(نظرية ٨)

يتساوى المثلثان $م ك هـ$ و $و ك هـ$

وينتج ان $\angle م ك هـ = \angle و ك هـ$

وهو المطلوب

اي ان $\angle م ك هـ = \angle ا ب ح$

« عملية ه »

المطلوب تنصيف زاوية معلومة



(شكل ٨١)

(المفروض) ان $\angle A$ زاوية المعلومة

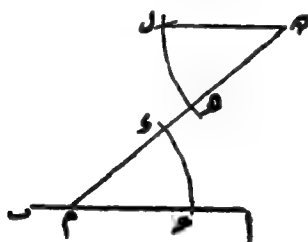
(المطلوب عمله) تنصيف هذه الزاوية

(العمل) نركز في B وننصف قطر مناسب نرسم قوساً تقطع B في C و B ح في D نم نركز في كل من C و D وننصف قطر مناسب نرسم قوسينتقاطعان في E ونصل B فيكون هو منتصف الزاوية $\angle A$ ح(البرهان) فصل $\angle CBE = \angle DBE$ فتى المثلثين $\triangle BCE = \triangle DBE$ بالعمل $\angle CBE = \angle DBE$ بما أن $\angle CBE = \angle DBE$ $\triangle BCE = \triangle DBE$ مشترك بين المثلثين

يساوى المثلثان $\triangle ABC$ و $\triangle DCB$
 وينتج أن $\angle A = \angle D$
 أى أن AB ينصف CD وهو المطلوب

« عملية ٦ »

المطلوب رسم مستقيم يوازي آخر معلوما من نقطة مفروضة خارجه



(شكل ٨٢)

(المفروض) ان AB المستقيم المعلوم وان C النقطة المفروضة خارجه
 (المطلوب عمله) رسم مستقيم من نقطة C يوازي AB
 (العمل) نقرض نقطة مثل M على AB ونصل CM ثم نرسم
 من نقطة C المستقيم CD كي يصنع مع CM زاوية $\angle DCM$ تساوى
 زاوية $\angle CMB$ كما تقدم بعملية (٤) فيكون CD هو المستقيم الذى
 يوازي AB

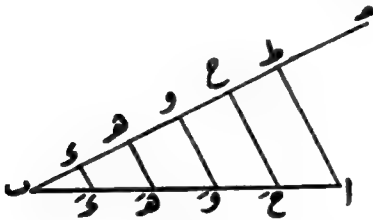
(البرهان) $\angle DCM = \angle CMB$ بالعمل

وهاتان الزاويتان متبادلتان

اذن CD يوازي AB (نظرية ٢٧) وهو المطلوب

« عملية ٧ »

المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى أقسام متساوية



(شكل ٨٣)

(المفروض) أن AB المستقيم المعلوم

(المطلوب عمله) تقسيم AB الى خمسة أقسام متساوية

(العمل) نرسم من B مستقيماً مثل BC غير محدود يصنع مع AB

زاوية ABC ثم نأخذ على BC خمسة أبعاد متساوية ولتكن B و

C_1 و C_2 و C_3 و C_4 و C_5 ونصل AC_5 ونرسم من كل من C_1 و

C_2 و C_3 و C_4 مستقيماً توازي AC_5 وتقابل AB في D_1 و D_2 و D_3 و D_4

D_5 فتكون هذه النقاط هي نقط التقسيم ويكون $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5B$

$= D_5B$

(البرهان) بما أن المستقيمتين BC و AC_5 متوازيتين

AC_5 متوازية بالعمل والمستقيم BC يقطعها واجزأؤه B و

C_1 و C_2 و C_3 و C_4 و C_5 متساوية فتكون اجزاء المستقيم AB

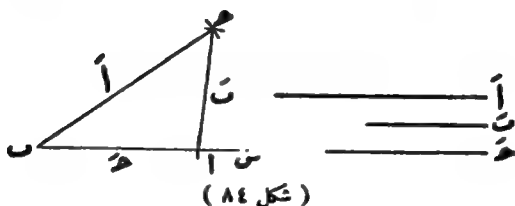
وهي AD_1 و D_1D_2 و D_2D_3 و D_3D_4 و D_4D_5 و D_5B متساوية كذلك

(نظرية ٤٦)

وبذلك ينقسم المستقيم AB الى خمسة أقسام متساوية وهو المطلوب

« عملية ٨ »

المطلوب رسم مثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة



(المفروض) أن a, b, c أطوال الاضلاع الثلاثة للمثلث

أ ب ح

(المطلوب عمله) رسم المثلث أ ب ح

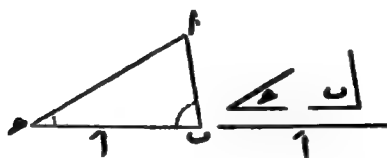
(العمل) نرسم المستقيم ب س ونأخذ عليه البعد $b = ح' ح'$ ثم نركز في ب وننصف قطر $a = أ'$ نرسم قوسا ونركز في أ' وننصف قطر $c = ب'$ نرسم قوسا أخرى قطع الأولى في ح' ثم نصل ح' أ ح' ح' فيكون أ ب ح المثلث المطلوب

(البرهان) بما ان الاضلاع ب ح ح' ح' أ ب تساوى بالعمل

أ ب ح' ح' ب' ح' فيكون أ ب ح المثلث المطلوب رسمه

« عملية ٩ »

المطلوب رسم مثلث اذا علم منه ضلع والزائوران المجاورتان له



(شكل ٨٥)

(المفروض) ان \hat{A} الضلع المعلوم من المثلث ABC وأن $BC = B'C'$
 الزاويتان المجاورتان للضلع $A'B'$

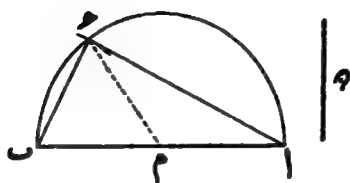
(المطلوب عمله) رسم المثلث ABC

(العمل) نرسم المستقيم $BC = A'B'$ ونرسم من نقطة B مستقيماً
 يصنع مع BC زاوية تساوي $\angle B'$ وكذلك نرسم من نقطة C مستقيماً
 يصنع مع BC زاوية تساوي $\angle C'$ ثم نجد هذين المستقيمين الى ان
 يتلاقيا في نقطة A فيكون ABC المثلث المطلوب

(البرهان) بما ان الضلع $BC = A'B'$ بالعمل $\angle B = \angle B'$ $\angle C = \angle C'$
 $BC = A'B'$ $\angle B = \angle B'$ $\angle C = \angle C'$ بالعمل أيضاً فيكون ABC المثلث
 المطلوب رسمه

« عملية ١٠ »

المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر واحد
 الضلعين الآخرين



(شكل ٨٦)

(المفروض) ان AB الوزن \angle أحد الضلعين الآخرين

(المطلوب عمله) رسم المثلث القائم الزاوية

(الحل) نضع AB في M ونركز فيها ونضع قطر يساوي AB

نرسم نصف محيط دائرة ثم نركز في B ونضع قطر يساوي \angle نرسم
قوساً قطع نصف المحيط في C ثم نصل C ب A و C ب B فيكون ABC

المثلث المطلوب

(البرهان) نصل CM

$$\text{بما ان } \angle CMA = \angle CMB = 90^\circ$$

$$\text{تكون } \angle CMA = \angle CMB = 90^\circ$$

$$\angle CMA = \angle CMB = 90^\circ$$

$$\text{وتكون } \angle CMA + \angle CMB = \angle CMA + \angle CMB = 180^\circ$$

$$\text{أي ان } \angle CMA + \angle CMB = 180^\circ$$

وبما أن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين

$$\text{فكون } \angle CMA + \angle CMB = 180^\circ \text{ وبذلك يكون } ABC \text{ المثلث}$$

المطلوب رسمه

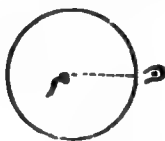
(١) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

- (٢) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه زاويتان والضلع المقابل لاحدهما
- (٣) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما
- (٤) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر وزاوية حادة
- (٥) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر ومجموع الضلعين الآخرين
- (٦) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر والفرق بين الضلعين الآخرين
- (٧) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه المحيط وزاويتا القاعدة
- (٨) المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين اذا علمت زاوية رأسه وطول العمود النازل من الرأس على القاعدة
- (٩) المطلوب رسم المثلث ١ ب ح اذا علمت الزاويتان ب و ح وطول العمود النازل من ا على ب ح
- (١٠) المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين اذا علمت زاوية رأسه وطول قاعدته
- (١١) المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين اذا علمت قاعدته ومجموع احدى ساقيه وارتفاعه
- (١٢) المطلوب رسم متوازي الاضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزاوية المحصورة بينهما
- (١٣) المطلوب رسم المربع المعلوم ضلعه
- (١٤) المطلوب رسم متوازي الاضلاع اذا علم طول قطرية والزاوية التي بينهما
- (١٥) المطلوب رسم المعين اذا علم طول قطريه

الباب السابع

في المحال الهندسية

(تعريف) المحل الهندسى لنقطة هو الطريق الذى تتحرك فيه هذه النقطة وهى مقيدة بشرط أو جملة شروط
ولادراك معنى المحل الهندسى نذكر بعض أمثلة بسيطة وفى كل منها سنتخذ البرهان النظرى دليلا حتى نتحقق ان كل نقطة من قط المحل الهندسى تفى بالشرط المذكور
مثال ١ — المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير وهى حافظة لبعده معين بينها وبين نقطة اخرى ثابتة

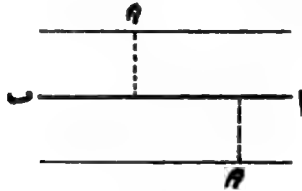


(شكل ٨٨)

(المفروض) ان م نقطة ثابتة وان البعد المعين سنتيمتران
(المطلوب عمله) إيجاد المحل الهندسى لنقطة تسير بحيث يكون بعدها عن م يساوى سنتيمترين على الدوام
(العمل) نركز فى م ونصف قطر يساوى سنتيمترين نرسم محيط دائرة فيكون هذا المحيط هو المحل الهندسى المطلوب

(البرهان) نأخذ أى نقطة من قط المحل الهندسى مثل δ ونصلها بنقطة α فن حيث أن α مركز الدائرة المرسومة ونقطة δ إحدى نقط المحيط يكون $\alpha\delta$ مساوياً سنتيمترين
اذن محيط الدائرة هو المحل الهندسى المطلوب

مثال ٢ - المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير على بعد ثابت من مستقيم معلوم



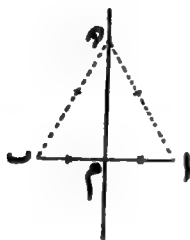
(شكل ٨٩)

(المفروض) ان $\alpha\beta$ مستقيم معلوم وان البعد المعين سنتيمتر واحد
(المطلوب عمله) إيجاد المحل الهندسى لنقطة تسير بحيث يكون بعدها عن $\alpha\beta$ يساوى سنتيمتراً على الدوام

(العمل) نرسم مستقيماً أعلى $\alpha\beta$ وعلى بعد سنتيمتر منه وكذلك نرسم مستقيماً اسفل $\alpha\beta$ وعلى بعد سنتيمتر منه فيكون المستقيم الأعلى المحل الهندسى للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر أعلى المستقيم $\alpha\beta$ ويكون المستقيم الأسفل المحل الهندسى للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر اسفل $\alpha\beta$

(البرهان) نأخذ أى نقطة من نقط الخط الأعلى مثل δ ونزل منها عموداً على $\alpha\beta$ فن حيث أن المستقيمين المتوازيين على بعد واحد فى جميع امتدادهما يكون طول العمود سنتيمتراً واحداً

ويكون المستقيم الموازي هو المحل الهندسي المطلوب
وبالمثل نبرهن على ان المستقيم الاسفل هو كذلك المحل الهندسي
لنقطة التي تسير على بعد ستيمةر اسفل المستقيم ا ب
مثال ٣ - المطلوب تعيين المحل الهندسي للنقطة التي بعداها عن
نقطتين ثابتتين متساويان



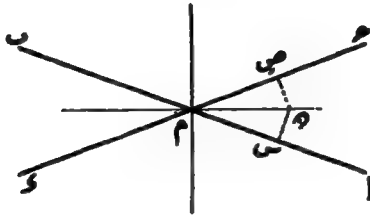
(شكل ٩٠)

(المفروض) ان ا ب نقطتان ثابتتان
(المطلوب عمله) ايجاد المحل الهندسي للنقطة التي بعداها عن
ا ب دائماً متساويان
(العمل) نضع المستقيم ا ب في نقطة م ثم نقيم من م عموداً على
ا ب فيكون هذا العمود هو المحل الهندسي المطلوب
(البرهان) نأخذ أى نقطة على العمود (سواء كانت أعلى ا ب
أو اسفله) مثل د ونصل د ا د ب
فما ان $د ا = د ب$ يكون المثلثان د ا ب د ب متساويي البعد
عن موقع العمود د م

(نظرية ١٨)

ويكون د ا = د ب
اذن د م هو المحل الهندسي المطلوب

مثال ٤ - المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن مستقيمين متقاطعين متساويان



(شكل ٩١)

(المفروض) ان المستقيمين ا ب ح و يتقاطعان فى نقطة م
(المطلوب عمله) إيجاد المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن
ا ب ح و متساويان

(العمل) نصف الزاويتين ١ ٢ ح و ب م و وكذلك نصف
الزاويتين ب م ح و ٦ م و ا فيكون كل من المنصفين هو المحل الهندسى
المطلوب

(البرهان) نأخذ أى نقطة على أحد المنصفين ولنكن نقطة ه
داخل الزاوية ١ ٢ ح وننزل العمودين ه س ٦ ه م على ١ ٢ ح و
فى المثلثين ه م س ٦ ه م

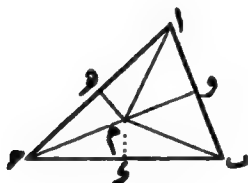
$$\left. \begin{array}{l} \text{بالقيام} \\ \text{والتوجه م مشترك بين المثلثين} \\ \text{بما ان} \\ \text{بالعمل} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle ه م س = \angle ه م ٦ \\ \angle ه م س = \angle ه م ٦ \end{array}$$

يتساوى المثلثان ه م س ٦ ه م (نظرية ٢٠)
وينتج ان ه س = ه م

أذن كل من المستقيمين اللذين ينصفان الزوايا المحصورة بين المستقيمين المعلومين هو المحل الهندسي المطلوب

تقاطع المحال الهندسية

نستخدم تقاطع المحال الهندسية في حل كثير من العمليات الهندسية ويمكن تعيين موضع نقطة تقيد بشرطين بإيجاد نقطة تقاطع المحلين الهندسيين المرتبطين بالشروط المذكورين واليك المثال
مثال ١ - المطلوب تعيين نقطة تكون أبعادها عن رؤوس مثلث متساوية



(شكل ٩٢)

(المفروض) ان $أ ب ح$ مثلث
(المطلوب عمله) إيجاد نقطة تكون أبعادها عن $أ ب ح$ متساوية

(العمل) ننصف المستقيمين $أ ب$ و $أ ح$ في $و$ و $ح$ ثم نقيم من $و$ عموداً على $أ ب$ ومن $ح$ عموداً على $أ ح$ فيتلاقى العمودان في نقطة $م$ فتكون هذه هي النقطة المطلوبة بمعنى ان $أ م = ب م = ح م$
(البرهان) من حيث ان $و$ هو العمود المقام على منتصف $أ ب$

يكون $١٢ = ٢٠$

ومن حيث أن ٥ هو العمود المقام على منتصف ١ ح

يكون $١٢ = ٢٠$ ح

أي أن $١٢ = ٢٠ = ٢٠$ ح

وعلى ذلك تكون نقطة ٢ هي النقطة المطلوب تعيينها

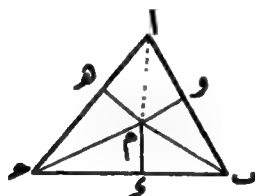
(ملاحظة) من حيث أن $٢٠ = ٢٠$ ح تكون نقطة ٢ إحدى

نقط العمود المقام على منتصف ١ ح وبذلك يتبين أن الأعمدة

المقامة من منتصفات اضلاع مثلث تتلاقى في نقطة واحدة

مثال ٢ - المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن اضلاع

مثلث متساوية



(شكل ٩٣)

(المفروض) أن ١ ح مثلث

(المطلوب عمله) إيجاد نقطة تكون ابعادها عن الاضلاع ١ ح ٢ ح

٣ ح متساوية

(العمل) نصف زاويتي ٢ ح ٣ ح بمستقيمين يتلاقيان في نقطة

٤ فتكون هذه هي النقطة المطلوبة أي أن العمود ٤ ح ٢ ح ٣ ح

(البرهان) من حيث أن ٢ ح ينصف زاوية ٢ ح

يكون $س م = م و$

ومن حيث ان ح م ينصف زاوية ح

يكون $س م = م و$

اي ان $س م = م و = م و$

وعلى ذلك تكون نقطة م هي النقطة المطلوب تعيينها

(ملاحظة) من حيث ان العمود $س م = م و$ تكون نقطة م

احدى نقط المستقيم الذى ينصف زاوية ا وبذلك يتعين ان منصفات
زوايا المثلث الثلاث تتلاقى فى نقطة واحدة

تمارين (١٦)

(١) المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى تكون على بدين

متساويين من مستقيمين متوازيين

(٢) المطلوب تعيين المحل الهندسى لرأس الزاوية القائمة من مثلث

قائم الزاويه وتره ثابت

(٣) المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير وبعدها عن محيط

دائرة معلومة ثابت

(٤) المطلوب تعيين المحل الهندسى لرأس مثلث متساوى الساقين

قاعدته ثابته

(٥) المطلوب تعيين نقطة على بعد معلوم من نقطة اخرى مفروضة

وعلى بدين متساويين من مستقيمين متوازيين

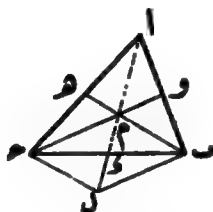
(٦) المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن ثلاث نقط مفروضة

متساوية

- (٧) عين نقطة على مستقيم معلوم بحيث يكون بعدها عن نقطتين مفروضتين خارج المستقيم متساويين
- (٨) عين نقطة على مستقيم بحيث يكون بعدها عن مستقيمين آخرين متقاطعين متساويين
- (٩) المطلوب تعيين نقطة على بعد معين من مستقيم معلوم ويكون بعدها عن نقطتين معلومتين متساويين
- (١٠) المطلوب تعيين نقطة يكون بعدها عن نقطتين معلومتين متساويين وكذا يكون بعدها عن مستقيمين متوازيين متساويين
- (١١) المطلوب تعيين نقطة يكون بعدها عن نقطتين معلومتين متساويين وأيضاً يكون بعدها عن مستقيمين متقاطعين متساويين
- (١٢) المطلوب رسم المثلث معلوم منه القاعدة والارتفاع بحيث يكون رأسه على مستقيم معلوم
- (١٣) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه قاعدته وارتفاعه وطول المستقيم المتوسط النصف للقاعدة
- (١٤) المطلوب تعيين المحل الهندسي لنقطة يكون مجموع بعدها عن ضلي زاوية ثاباً

تمارين عامة

(١) المستقيمت المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة وهذه النقطة تقسم كلا منها الى الثلث من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس



(شكل ٩٤)

(المفروض) ان $ا ب ح$ مثلث
 (المطلوب اثباته) ان المستقيمت المتوسطة تتلاقى في نقطة واحدة
 (البرهان) اولاً - نضع الضلعين $ا ب$ و $ا ج$ في $و ٦$
 ونفرض ان المستقيمتين المتوسطين يتلاقيان في نقطة $م$ ثم نصل $ا م$
 ونعده الى ان يقابل $ب ح$ في $و$ فتكون نقطة $و$ منتصف $ب ح$
 وذلك لاننا اذا رسمنا من نقطة $ب$ مستقيماً يوازي $و ح$ ويقابل
 امتداد $ا و$ في $ل$

يكون في $\triangle ا ب ل$ الضلع $و م$ ينصف $ا ب$ ويوازي $ب ل$
 اذن نقطة $م$ تنصف $ا ل$
 واذا وصلنا $ل ح$ يكون في المثلث $ا ل ح$ المستقيم $م$ يقطع
 ضلعيه وينصفهما

اذن $م ه$ يوازي $ل ح$

اي أن $ب م$ يوازي $ل ح$

ويكون الشكل $ب ل ح م$ متوازي اضلاع

ومن حيث ان قطري متوازي الاضلاع ينصف احدهما الاخر فتكون نقطة $و$ منتصف $ب ح$

وبذلك يثبت ان المستقيمتين المتوسطة الثلاث تتلاقى في $م$

ثانياً — لاثبات ان نقطة $م$ قسم كلا من المستقيمتين المتوسطة الى الثلث من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس نقول

$$\left. \begin{array}{l} ١٢ = ١٢ \\ ١٢ = ١٢ \end{array} \right\} \text{ بما ان } \begin{array}{l} ١٢ = ١٢ \\ ١٢ = ١٢ \end{array}$$

اذن $م و$ = نصف ١٢

اي ان $م و$ ثلث ١٢ و ١٢ ثلث ١٢

وبالمثل نبرهن على ان $م ه$ ثلث $ب ح$ و $م ب$ ثلث $ب ح$

٦ و ٦ ثلث ١٢ و ١٢ ثلث ١٢

(٢) $١ ب ح و$ $١ ب ح و$ مثلثان بينهما قاعدة مشتركة $ب ح$ وفي

جهة واحدة منها فاذا كان $١ ب = ١ ب$ و $١ ب = ١ ب$ و $١ ب = ١ ب$

فبرهن على ان $١ ب$ يوازي $ب ح$

(٣) اذا مدت إحدى ساقى مثلث متساوى الساقين من جهة الرأس

ونصفت الزاوية الخارجة فبرهن على ان النصف يوازي القاعدة

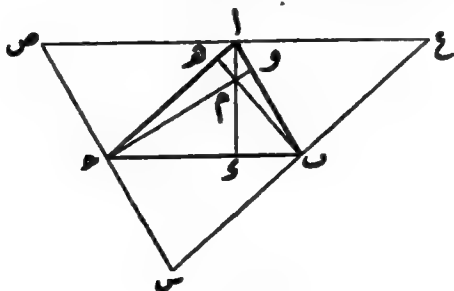
(٤) $١ ب ح$ مثلث متساوى الساقين ($١ ب = ١ ب$) نصفت

زاويته $ب ح$ فاذا قطع منتصف $ب ح$ الضلع $١ ب$ في $و$

وقطع منتصف $ب ح$ الضلع $١ ب$ في $ه$ فبرهن على ان $و ه$

يوازي $ب ح$ وأن $و ه = و ه$ و $و ه = و ه$

- (٥) AB ح مثلث متساوي الاضلاع فاذا مد ضلعه B ح الى $و$
وكان $ح و = ح ب$ فبرهن على ان $و$ عمودى على AB
- (٦) اذا فرضت نقطة $و$ داخل مثلث AB ح وكان $و = ا$ AB
فبرهن على ان $ا < ح$ AB
- (٧) برهن في المثلث القائم الزاوية على ان المستقيم الذى يصل
رأس القائمة ومصف الوتر يساوى نصف هذا الوتر
- (٨) برهن في المثلث الذى مقدار زواياه ٩٠ ٦٠ ٣٠ على
ان اصغر اضلاعه يساوى نصف اكبرها
- (٩) AB ح مثلث مد ضلعه AB الى $س$ وضلعه $ا$ ح الى $ص$ فاذا
كان $س ب = س ح = ب ح$ وقاطع $ب ص$ ٦ ح $س$
في $ع$ فبرهن على ان $ب ع > ب ا + ا ح = ٩٠$
- (١٠) AB ح مثلث مد ضلعه B ح الى $و$ فاذا قطع منتصف $ا$
الضلع B ح في $هـ$ فبرهن على ان ضعف $ا هـ > و =$
 $ا ب + ا ح و$
- (١١) برهن على ان الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع
المقابلة لها تتلاقى في نقطة واحدة



(شكل ٩٥)

(المفروض) ان a b ح مثلث
(المطلوب اثباته) ان الاعمدة النازلة من a b c ح على الاضلاع
المقابلة لها تتلاقى في نقطة واحدة

(البرهان) نرسم من a مستقيما يوازي b ح ونرسم من b مستقيما
يوازي a ح ونرسم من c مستقيما يوازي a b ح ونفرض ان هذه
المستقيمات تقاطع وتكون المثلث s v e
كل من الشكلين a e b c a b c v متوازي اضلاع لان
الاضلاع المقابلة في كل منهما متوازية بالعمل
اذن $e = a = b = c$

اي أن نقطة a منتصف e v
وبالمثل تثبت أن نقطة b منتصف s v e ونقطة c منتصف s v
فلو أنزلنا أعمدة من a b c ح على الاضلاع المقابلة في \triangle
 a b c تكون هذه الاعمدة بمثابة أعمدة مقامة من منتصفات الاضلاع
في $\triangle s$ v e

وسبق ان برهنا أن هذه الاعمدة تتلاقى في نقطة واحدة وبذلك
يثبت المطلوب

(١٢) برهن على أن مجموع المستقيمات المتوسطة في مثلث أكبر من
ثلاثة أرباع محيطه

(١٣) a b c ح مثلث نصف ضلعه b c في m ونرسم من b c ح
عمودان على مستقيم يمر بنقطة a فإذا فرض أن موقعي العمودين
هـ $ل$ $و$ فيرهن على أن $ل = م = و$

(١٤) a b c ح مثلث مد ضلعه a b c ح الى s $و$ فإذا نصفت

الزاويتان الخارجتان $\angle \alpha$ و $\angle \beta$ وقاطع المنصفان
 في نقطة θ فبرهن على أن $\angle \alpha = \angle \beta$ (١٥)
 ١ α و β متوازي اضلاع مد قطراه α الى θ بحيث كان
 $\angle \alpha = \angle \beta$ ومن نقطة θ رسم المستقيم θ و يوازي α و β
 ويقابل امتداد α و β في θ والمطلوب البرهنة على أن α و β
 متوازي اضلاع

١ α و β مثلث متساوي الساقين نصفت قاعدته α في نقطة
 و فإذا فرضت أي نقطة على α مثل θ فبرهن على أن
 $\angle \alpha = \angle \beta$ و $\angle \gamma = \angle \delta$

(١٧) المستقيم الذي يصل وسطى اضلعين غير المتوازيين في شبه
 المنحرف يمر بنصف قطريه

(١٨) المستقيم الذي يصل منتصفى قطري شبه منحرف يساوى
 نصف الفرق بين قاعدتيه

(١٩) اذا نصفت زوايا متوازي اضلاع فبرهن على أن الشكل الناتج
 من تقاطع هذه النصفات مستطيل قطراه يوازيان اضلاع
 متوازي الاضلاع

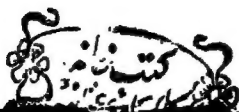
(٢٠) ١ α و β متوازي اضلاع فرضت على قطره α والنقطتان
 γ و δ فإذا كان $\angle \gamma = \angle \delta$ فبرهن على أن α و β
 متوازي اضلاع

(٢١) ١ α و β شكل رباعي فيه $\angle \alpha = \angle \beta$ و فإذا كانت $\angle \gamma$
 $\angle \delta = \angle \epsilon$ فبرهن على أن α و β يوازي γ و δ

(٢٢) ١ α و β متوازي اضلاع مد قطره α الى θ بحيث كان

- ح ه = ح ا ثم رسم من ه مستقيم يوازي ح ب ورسم
من ب مستقيم يوازي ا ح فاذا تقاطع المتوازيان في نقطة و
فبرهن على ان ا ب و ح متوازي اضلاع
- (٢٣) ا ب ح د مربع فاذا وصل من ا الى منتصفى ب ح و د
ثم وصل من ح الى منتصفى د ا و ا ب فبرهن على ان الشكل
الناتج من تقاطع هذه المستقيمتين معين
- (٢٤) ا ب ح مثلث مد ضلعه ح ا الى س ونصفت الزاوية الخارجة
ب ا س فاذا فرضت اى نقطة ه على هذا النصف فبرهن
على ان ا ب + ا ح > ب ه + ح ه
- (٢٥) ا ب ح مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا ح) فرضت
نقطة د على ساقه ا ب ومد ح ا الى ه بحيث كان ه ا =
ا د فاذا وصل ه د ومد الى ان تقاطع مع ب ح فى و فبرهن
على ان ه و عمودى على ب ح

« تم الجزء الاول ويليه الجزء الثانى »
(مقرر السنة الثانية من التعليم الثانوى)



آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
صورت میں ایک آنہ یومیہ دیرانہ لیا جائے گا۔
